ПОШУК ОПТИМУМУ ТОВАРОВИРОБНИКА В РАМКАХ N-ФАКТОРНИХ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ

SEARCHING FOR MANUFACTURER'S OPTIMUM IN N-FACTOR PRODUCTION FUNCTIONS

УДК 330.356.7:658.6

Янковий В.О.
к.е.н., доцент кафедри економіки і планування бізнесу
Одеський національний економічний університет

Обговорюються теоретичні і прикладні аспекти використання базових положень мікроекономіки задля визначення оптимального поєднання ресурсів у рамках N-факторних виробничих функцій. Застосування запропонованого алгоритму здійснюється на прикладі виробничих функцій, узагальнених функцією з постійною еластичністю заміщення факторів.
Ключові слова: *еквімаржинальний принцип, виробнича функція, заміщення факторів, оптимальна фондоозброєність.*

Обсуждаются теоретические и прикладные аспекты использования базовых положений микроэкономики для определения оптимального сочетания ресурсов в рамках N-факторных производственных функций. Применение предложенного алгоритма осуществляется на примере производственных функций, обобщенных функцией с постоянной эластичностью замещения факторов.
Ключевые слова: *еквимаржинальний принцип, производственная функция, замещение факторов, оптимальная фондовооруженность.*

Theoretical and practical aspects of using of basic microeconomics thesis for determining of an optimal mix of resources in N-factor production functions are discussed. Applying of the proposed algorithm is implemented on example of production functions, which are generalized by function with constant elasticity of substitution of factors.
Key words: *principle of equal margin, production function, substitution of factors, optimal capital-labor ratio.*

Постановка проблеми. Як відомо з теорії мікроекономіки, існує декілька головних цілей діяльності сучасного підприємства – максимізація прибутку, випуску продукції (робіт, послуг), частки ринку, доданої вартості тощо. Якщо економічні агенти товаровиробника (власники бізнесу, топ-менеджери, власники акцій) на даному етапі життєвого циклу визначили в якості основної мети максимізацію випуску продукції, то оптимізація діяльності підприємства повинна здійснюватися з урахуванням наступних положень економічної теорії.

Нехай товаровиробник використовує N ресурсів (факторів виробництва) $X_1, X_2, \ldots, X_N$, що купуються за цінами $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Тоді оптимальна комбінація факторів має задовольняти, по-перше, бюджетне обмеження:

$$p_1X_1 + p_2X_2 + \ \ldots \ + p_NX_N = C, \qquad (1)$$

де C – загальні витрати на всі види використовуваних ресурсів.

По-друге, еквімаржинальний принцип:

$$\frac{MP_1}{p_1} = \frac{MP_2}{p_2} = \ldots = \frac{MP_N}{p_N}, \qquad (2)$$

де $MP_1, MP_2, \ldots, MP_N$ – граничні продукти (від англ. абревіатури *Marginal Products*) відповідних факторів виробництва.

Еквімаржинальний принцип полягає в тім, що зважені за цінами граничні продукти факторів виробництва мають бути вирівняні. Реалізуючи ці умови, підприємство досягає стану внутрішньої рівноваги, тобто найліпшого поєднання ресурсів, коли при заданих загальних витратах C забезпечується найбільший випуск продукції max$Y$, або при заданому випуску продукції Y – найменші загальні витрати min$C$.

Сучасне підприємство як ринково-виробнича система є складною, динамічною, відкритою системою, функціонування якої носить імовірнісний характер. Між обсягами вихідних ресурсів і обсягами готової продукції даної системи спостерігаються певні причинно-наслідкові залежності й зв'язки, які визначаються множиною чинників: рівнем системи, характером виробничих відносин, діючою технологією тощо. В основу математико-статистичних моделей ринково-виробничих систем покладено теорію виробничих функцій (ВФ), яка є важливим елементом побудови та використання кількісних методів на всіх рівнях управління економікою.

На мікрорівні існують сотні тисяч подібних математико-статистичних моделей, оскільки кожне підприємство має свою ВФ, яка вказує на існування даної альтернативної можливості одержання певного обсягу продукції при конкретному співвідношенні між виробничими факторами. Вона характеризує технологічний спосіб виробництва, обраний даним підприємством.

Задача полягає в тім, щоб у кожному конкретному випадку, для досліджуваної ринково-виробничої системи, що описується певною ВФ, визначити такі співвідношення ресурсів X_1/X_2, X_1/X_3, …, X_{N-1}/X_N, котрі б забезпечили оптимальні умови її функціонування, тобто при заданих загальних витратах C – найбільший випуск продукції Y або при заданому випуску продукції Y – найменшу величину C. Серед найбільш популярних в економічних дослідженнях ВФ можна вказати, принаймні, чотири взаємозв'язані моделі: 1) функцію з постійною еластичністю заміщення, або

CES-функцію (*Constant Elasticity of Substitution*); 2) функцію Кобба-Дугласа; 3) лінійну ВФ; 4) функцію Леонтьева.

Іншими словами, має місце наступна проблема: як визначити оптимальне поєднання виробничих факторів у кожному конкретному випадку адекватного застосування певної ВФ, зокрема, вказаних вище чотирьох ВФ. Так, при $N = 2$, коли застосовується найбільш агрегована двофакторна модель з ресурсами «виробничі фонди» (капітал) K і «праця» L, виникає задача визначення оптимальної фондоозброєності K/L на підприємстві.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Серед авторів, які займалися останнім часом питаннями оптимізації економічної діяльності товаровиробника на базі ВФ, необхідно відзначити Р. Пиндайка, Д. Рабинфельда [1], В.М. Гальперина [2], Дж.М. Перлоффа (Perloff, 2014) [3], Д.Л. Дебертіна (Debertin, 2012) [4] та ін.

Наприклад, Дебертін розглядає алгебраїчні умови максимізації неокласичних ВФ на основі аналізу знаків добутків перших та других похідних адитивних і мультиплікативних моделей сільськогосподарського виробництва. Він наводить також геометричне тлумачення наявності локальних екстремумів та глобального максимуму на базі сідлових точок поверхні ВФ. При цьому Дебертін не пов'язує проблему максимізації випуску продукції з визначенням рівня оптимального поєднання виробничих факторів в рамках досліджуваних ВФ [4, с. 105-111].

Деякі аспекти проблеми, що розглядається, зустрічаються в публікаціях Д.Н. Боровського [5], М.В. Казакової [6], В.М. Подладчикова [7], С.С. Шумської [8], Черевко Є.В. [9] та ін. Однак, системний підхід до її вирішення в сучасній економічній літературі відсутній.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. До сих пір у мікроекономіці не проведено комплексного дослідження існуючих підходів до визначення оптимального поєднання ресурсів у рамках багатофакторних ВФ, зокрема, для математико-статистичних моделей, узагальнених *CES*-функцією. Тобто загальне розуміння даної проблеми існує, але відсутній універсальний методологічний інструментарій її вирішення.

Мета статті полягає в тім, щоб запропонувати широкому колу економістів доволі просту можливість економіко-математичного визначення оптимуму товаровиробника в рамках *N*-факторних ВФ на основі відомого в економічній теорії еквімаржинального принципу.

Виклад основного матеріалу дослідження. Очевидно, що в разі вимірювання всіх ресурсів $X_1, X_2, \ldots, X_N$ у грошових одиницях їх граничні продукти теж знаходяться у вартісному вираженні. Тому формулу (2) можна представити так:

$$MP^*_1 = MP^*_2 = \ldots = MP^*_N, \quad (3)$$

де $MP^*_1, MP^*_2, \ldots, MP^*_N$ – граничні продукти факторів виробництва, виражені через їх кількості в натуральному вимірі.

Отже, сутність еквімаржинального принципу полягає в рівності граничних продуктів виробничих факторів в умовах оптимального поєднання ресурсів підприємства. Наприклад, якщо p_1 – ціна однієї машино-години роботи технологічного устаткування в грн., а p_2 – тариф однієї людино-години праці в грн., то для підприємства в точці оптимуму буде виконуватися наступне співвідношення: *граничний продукт основних виробничих фондів, виражений у кількості машино-годин роботи технологічного устаткування, дорівнює граничному продукту живої праці, вираженому в кількості людино-годин роботи виробничого персоналу*.

З формули (3) випливає, що при оптимальному поєднанні ресурсів товаровиробника гранична норма заміщення виробничих факторів *MRS* (*Marginal Rate of Substitution*) набуває вигляд

$$MRS_{ij} = \frac{MP *_j}{MP *_i} = 1, \ (i = 1, \ 2, \ \ldots, N; \ \ j = 1, \ 2, \ \ldots, N), \quad (4)$$

тобто дорівнює одиниці [10; 11].

Легко довести справедливість і зворотного твердження: якщо для граничної норми заміщення виробничих факторів виконується умова (4), то підприємство як товаровиробник знаходиться в точці оптимуму.

З урахування отриманих теоретичних результатів доходимо до наступного висновку: *пошук оптимального співвідношення ресурсів у рамках N-факторних ВФ зводиться до визначення виразу граничної норми заміщення вказаних ресурсів і прирівнювання її до одиниці*.

Отже, ми пропонуємо пошук оптимуму товаровиробника в рамках N-факторних ВФ проводити з використанням наступної рівності:

$$MRS_{ij} = \frac{\partial Y}{\partial X_j} : \frac{\partial Y}{\partial X_i} = \frac{f_j'(X_1, X_2, \ldots, X_N)}{f_i'(X_1, X_2, \ldots, X_N)} = 1. \quad (5)$$

Розглянемо, як впливають властивості конкретних ВФ на застосування формули (5) у процесі визначення оптимального співвідношення виробничих факторів. Очевидно, що гранична норма заміщення ресурсів MRS_{ij} буде дійсним числом при виконанні математичної умови $f_i'(X_1, X_2, \ldots, X_N) \neq 0$, тобто граничні продукти всіх факторів MP^*_i, MP^*_j у рамках даної ВФ вирізняються від нуля. Вказана умова зазвичай виконується для субституційних ВФ, у яких еластичність заміщення факторів не дорівнює нулю ($\sigma_{ij} \neq 0$). Це означає, що виробничі ресурси є певною мірою взаємозамінними, тобто деяка кількість одного виробничого фактора може бути компенсована відповідною кількістю іншого. Цю властивість називають гіпотезою про взаємозамінність факторів, або припущенням про їх ненульове заміщення. До субституційних ВФ відноситься функція Кобба-Дугласа ($\sigma_{ij} = 1$), лінійна

ВФ (σ_{ij} = +∞), для якої характерне абсолютне заміщення, та ін.

У лімітаційних ВФ між витратами ресурсів виробництва і кількістю продукції, що випускається, існують жорсткі технічні співвідношення, тобто певний виробничий результат може бути досягнутий у разі єдиної ефективної комбінації факторів. Найвідоміша функція цього виду – ВФ Леонтьева (σ_{ij} = 0). Такі функції використовують для моделювання строго детермінованих виробничих процесів, у яких не припустимі відхилення від установлених норм використання ресурсів на одиницю продукції.

Приймаючи до уваги наведені міркування, можна стверджувати, що запропонований підхід до пошуку оптимального співвідношення ресурсів справедливий лише у рамках субституційних *N*-факторних ВФ, для яких характерне ненульове заміщення факторів.

З формули (5) оптимальне поєднання ресурсів знаходиться досить просто з урахуванням математичного виразу конкретної ВФ. Покажемо це на прикладі найбільш популярної в економічних дослідженнях двофакторної (*N* = 2) ВФ Кобба-Дугласа:

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta}, \tag{6}$$

де *A* – коефіцієнт шкали (0 < *A*); *α*, *β* – параметри, що визначають еластичність випуску продукції за окремими факторами (0 < *α* < 1, 0 < *β* < 1).

При виконанні обмежень на невідомі параметри, які вказані в дужках, ВФ (6) відноситься до неокласичних функцій. При цьому бюджетне обмеження (1) має вигляд: *K* + *L* = *C*.

Перші частинні похідні вираження ВФ Кобба-Дугласа по *K* і *L* дорівнюють:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1} L^{\beta}; \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = A\beta K^{\alpha} L^{\beta-1}. \tag{7}$$

Для ВФ (6) запишемо умову (5):

$$MRS_{LK} = \frac{\partial Y}{\partial K} : \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{A\alpha K^{\alpha-1} L^{\beta}}{A\beta K^{\alpha} L^{\beta-1}} = 1. \tag{8}$$

Звідси оптимальна фондоозброєність K_1/L_1 визначається так:

$$\frac{K_1}{L_1} = \frac{\alpha}{\beta}, \tag{9}$$

тобто вкладення коштів у виробничі фонди і робочу силу буде оптимальним у пропорції еластичності випуску продукції за окремими факторами за умови адекватності математико-статистичної моделі, що заснована на ВФ (6).

Перевіримо справедливість отриманої формули (9) за допомогою математичного аналізу ВФ Кобба-Дугласа з метою визначення оптимальної фондоозброєності за критерієм «максимум випуску продукції». Для вирішення поставленого завдання виразимо *L* з рівняння зв'язку *L* = *C* – *K*, підставимо в формулу (6) і будемо шукати її максимум.

$$Y = AK^{\alpha}\left(C - K\right)^{\beta} \to max. \tag{10}$$

Знайдемо $\frac{\partial Y}{\partial K}$ – першу частинну похідну функції (10) по К на відрізку [0; *C*] і визначимо критичні точки, в яких вона дорівнює 0 або ∞. У результаті елементарних перетворень отримаємо:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = AK^{\alpha-1}\left(C-K\right)^{\beta-1}\left[a\left(C-K\right)-\beta K\right] \tag{11}$$

Очевидно, що $\frac{\partial Y}{\partial K} = 0$, коли один із співмножників формули (11) дорівнює 0. З урахуванням неокласичних умов *A* > 0, *K* > 0, *L* > 0 вираження (11) дорівнює нулю при *a*(*C* – *K*) – *βK* = 0. Звідси випливає, що точка

$$K_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} C_1 \tag{12}$$

є критичною. З формули (12) і співвідношення $L_1 = C_1 - K_1$ слідує

$$L_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta} C_1. \tag{13}$$

Розділив вираженням (12) на (13), отримаємо шукану оптимальну фондоозброєність K_1/L_1, яка повністю співпадає з виразом формули (9).

Виразивши K_1 із формули (9) і підставивши у функцію (6), знайдемо максимальний випуск продукції в умовах оптимальної фондоозброєності й адекватності ВФ Кобба-Дугласа економічному явищу, що досліджується:

$$K_1 = \frac{\alpha}{\beta} L_1; \quad Y_{MAX} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} L_1^{\alpha+\beta}. \tag{14}$$

Розглянемо реалізацію запропонованого підходу до визначення оптимальної фондоозброєності для *CES*-функції

$$Y = A_0 [\, A_1 K^{-p} + (1 - A_1) L^{-p} \,]^{-\frac{\gamma}{p}}, \tag{15}$$

де A_0 – коефіцієнт шкали (0 < A_0); A_1 – коефіцієнт ваги виробничого фактора (0 < A_1 < 1); *p* – параметр заміщення (-1 < *p*); *γ* – показник ступеня однорідності ВФ (0 < *γ*).

При виконанні обмежень на невідомі параметри, що вказані в дужках, ВФ (15) теж відноситься до неокласичних функцій. Її еластичність заміщення факторів визначається параметром *p* (σ_{ij}= 1/(1 + *p*)), тобто вона постійна (σ_{ij} = const), але може набувати будь-якого значення. Так при *p* = 0, σ_{ij} = 1 *CES*-функція перетворюється у ВФ Кобба-Дугласа, при *p* = -1, σ_{ij} = +∞ вона виступає у формі лінійної функції, при *p* = +∞, σ_{ij} = 0 ВФ (15) представляється функцією Леонтьева. Іншими словами, *CES*-функція узагальнює вказані три найбільш відомі в економічних дослідженнях ВФ.

Перші частинні похідні ВФ (15) по *K* і *L* дорівнюють:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{A_1}{A_0{}^{p}}\left(\frac{Y}{K}\right)^{1+p}; \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1-A_1}{A_0{}^{p}}\left(\frac{Y}{L}\right)^{1+p}. \tag{16}$$

Тоді умова (5) для *CES*-функції запишеться наступним чином:

$$MRS_{LK} = \frac{\partial Y}{\partial K} : \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{A_1}{1-A_1}\left(\frac{L}{K}\right)^{1+p} = 1. \tag{17}$$

Звідси оптимальна фондоозброєність K_1/L_1 визначається так:

$$\frac{K_1}{L_1} = \left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{1+p}}. \quad (18)$$

Максимальний випуск продукції в умовах оптимальної фондоозброєності й адекватності ВФ (15) економічному явищу, що досліджується, дорівнює:

$$K_1 = L_1\left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{p+1}}; Y_{MAX} = A_0 L_1^{\left(\gamma+\frac{\gamma}{p}\right)}[(1-A_1)C_1]^{-\frac{\gamma}{p}}. \quad (19)$$

Перевірку справедливості отриманої формули (18) за допомогою математичного аналізу *CES*-функції за критерієм «максимум випуску продукції» наведено в роботах автора [12-14].

Проілюструємо наведену процедуру використання ВФ (15) за даними статистичної звітності приватного м'ясопереробного підприємства «Гармаш» за 2005-2015 рр. (табл. 1).

Оскільки дані табл. 1 відображають динаміку змінних *Y, K, L* у часі, то *CES*-функція потребує динамізації, яка полягає у додатковому співмножнику, що відображає вплив на Y нейтрального НТП, тобто усіх факторів, окрім *K* і *L*. У цьому випадку формула (15) перетворюється до вигляду:

$$Y = A_0 e^{\lambda t}[A_1 K^{-p} + (1-A_1)L^{-p}]^{-\frac{1}{p}}, \quad (20)$$

де λ – темп приросту нейтрального НТП; t – змінна часу (t = 1, 2, …, m),

За даними табл. 1 побудуємо динамізовану *CES*-функцію, що моделює залежність реалізованої продукції ПП «Гармаш» від розміру основних виробничих фондів (капіталу) і витрат на оплату праці. Ітеративний алгоритм такої побудови можна знайти в роботі [15]. На шостій ітерації було отримане оптимальне рішення (табл. 2).

Таким чином, шукана *CES*-функція в явному вигляді записується так:

$$Y = 0{,}6951e^{0{,}0364t}[0{,}6025K^{0{,}1071} + 0{,}3975L^{0{,}1071}]^{9{,}3350}. \quad (21)$$

Тут параметр моделі *p* знайдений через оцінене значення еластичності заміщення ресурсів σ = 1,11997. Рівняння (21) досить точно описує динаміку реалізованої продукції на ПП «Гармаш» за 2005-2015 рр.: коефіцієнт детермінації R^2 = 0,9997; сума квадратів залишків моделі *RSS* = 0,0003; критерій Дарбіна-Уотсона *DW* = 2,279 (оптимальне значенні 2,0).

Таблиця 1

Вихідні дані для моделювання динаміки реалізованої продукції ПП «Гармаш»

Роки	*Y*, тис. грн.	*K*, тис. грн.	*L*, тис. грн.	*t*	*K / L*
2005	14820	13978	851	1	16,42538
2006	23439	14690	1401	2	10,48537
2007	40538	17644,5	2409	3	7,324408
2008	46790	23492,5	2839	4	8,274921
2009	42603	26834	3502	5	7,662479
2010	43214	30933	4913	6	6,296153
2011	53988	36957	7940	7	4,654534
2012	68049	37001,5	9202	8	4,021028
2013	67577	38113	8959	9	4,254158
2014	60321	42575	9591	10	4,439057
2015	66149	49128	8293	11	5,924032

Джерело: розроблено автором

Таблиця 2

Результати статистичного моделювання рівняння (20) за даними табл. 1

Ітерації	6
Константа *B*	0,695057496
Науково-технічний прогрес λ	0,036406882
Еластичність заміщення ресурсів σ	1,119975315
Параметр розподілу δ	0,602481383
Стандартна похибка *B*	0,072653509
Стандартна похибка λ	0,010552778
Стандартна похибка σ	0,512748173
Стандартна похибка δ	0,089507862
Скоригований коефіцієнт детермінації R_2	0,999661768
Сума квадратів регресійних залишків *RSS*	0,000310241
Коефіцієнт Дарбіна-Уотсона *DW*	2,279238999

Джерело: розраховано автором

Величина темпу приросту нейтрального науково-технічного прогресу λ = 0,0364 показує, що на досліджуваному підприємстві в середньому за рік реалізація зростала на 3,64 % під впливом усіх чинників, окрім зміни капіталу та праці.

На основі параметрів моделі (21) розрахуємо показник оптимальної фондоозброєності за першою формулою (18) для ПП «Гармаш» за 2005-2015 рр.:

$$(K/L)^* = \left(\frac{0,6025}{1-0,6025}\right)^{\frac{1}{1+0,1071}} = 1,5931.$$

Якщо звернутись до даних останнього стовпця табл. 1, то можна побачити, що фактична фондоозброєність на підприємстві суттєво перевищує оптимальну. Це означає, що виробничі фонди на ПП «Гармаш» знаходяться у надлишку. Даний висновок підтвердила і побудована ВФ Кобба-Дугласа: коефіцієнт при змінній ln(K) виявився статистично незначущим, ненадійним (критерій Стьюдента дорівнює -0,358, р-значущість 0,73).

Найближче до оптимального фактичне значення фондоозброєності (4,021) спостерігалося у 2012 р. і в цьому році підприємство дійсно одержало максимальну за досліджуваний період реалізовану продукцію 68049 тис. грн.

Виникає питання: яку виручку від реалізації ПП «Гармаш» отримало б у 2012 р. при оптимальній фондоозброєності 1,5931? Щоб відповісти на нього, скористаємось перетвореною другою формулою (19) з урахуванням її динамізації:

$$Y_{MAX} = A_0 e^{\lambda t} L(1-A_1)^{-\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{K_1}{L_1}\right)+1\right]^{-\frac{1}{p}} =$$

$$= 0,6951 \times 2,718282^{0,0364\times 8} 9202 \cdot$$

$$\cdot (1-0,6025)^{9,335} [1,5931+1]^{9,335} =$$

$$= 70446,33 \quad тис.\ грн.$$

Отже, резерв росту реалізованої продукції за рахунок оптимізації фондоозброєності (продажу частини невикористаних виробничих фондів і вкладання коштів у робочу силу) складає на підприємстві 70446 – 68049 = 2397 тис. грн.

Обговоримо запропонований принцип визначення оптимальної фондоозброєності задля двофакторної лінійної ВФ:

$$Y = A_2K + A_3L, \qquad (22)$$

де A_2, A_3 – параметри лінійної функції, що виражають граничні продукти виробничих факторів «основні фонди» і «праця».

Лінійна функція не відноситься до неокласичних, оскільки для неї не виконуються умови $K > 0$, $L > 0$. Однак, її заміщення факторів є абсолютним.

Перші частинні похідні вираження (22) по K і L дорівнюють A_3, A_4. Тому оптимальна фондоозброєність не залежить від конкретних значень K, L, однак, згідно умові (5), повинна виконуватись рівність $A_2 = A_3$. Це означає, що безліч точок прямої, якій відповідають сукупні витрати $C_1 = K_1 + L_1$ забезпечують оптимальну фондоозброєність. При цьому максимум продукції у вартісному вираженні дорівнює $Y_{MAX} = A_3C_1 + A_2$. Більш детально вказані питання обговорюються в роботах [16; 17].

Як зазначалося вище, реалізувати запропонований підхід до пошуку оптимального співвідношення ресурсів в рамках лімітаційної ВФ Леонтьева неможливо внаслідок нульового заміщення її факторів. Покажемо, що це дійсно так. Представимо двофакторну ВФ Леонтьева наступним чином:

$$Y = min\left(\frac{K}{c_1}; \frac{L}{c_2}\right), \qquad (23)$$

де c_1 – фондомісткість одиниці продукції ($0 < c_1$); c_2 – трудомісткість одиниці продукції ($0 < c_2$).

ВФ (23) теж не відноситься до неокласичних, оскільки не є двічі диференційованою. Для ВФ Леонтьєва граничні продукти факторів K, L дорівнюють нулю і гранична норма заміщення (5) представляє собою невизначеність типу 0/0. Перевіримо це ствердження:

$$MP_K = min\left(\frac{K+1}{c_1}; \frac{L}{c_2}\right) - min\left(\frac{K}{c_1}; \frac{L}{c_2}\right) = \frac{L}{c_2} - \frac{L}{c_2} = 0;$$

$$MP_L = min\left(\frac{K}{c_1}; \frac{L+1}{c_2}\right) - min\left(\frac{K}{c_1}; \frac{L}{c_2}\right) = \frac{K}{c_1} - \frac{K}{c_1} = 0. \qquad (24)$$

Між тим, шляхом математичного аналізу ВФ (23) за критерієм «максимум випуску продукції» досить легко показати, що її «оптимальна» (у сенсі зберігання ресурсів на складі) фондоозброєність дорівнює [16; 17]:

$$\frac{K_1}{L_1} = \frac{c_1}{c_2}. \qquad (25)$$

У вказаних точках випуск продукції при заданих загальних витратах C_1 дорівнює $Y = C_1/(c_1 + c_2)$.

Висновки з проведеного дослідження. Розвиток ідей теорії мікроекономіки і приклади визначення оптимальної фондоозброєності для двофакторних ВФ, узагальнених *CES*-функцією, показують простоту й ефективність запропонованого підходу до пошуку оптимуму товаровиробника, який визначає екстремальні співвідношення між випуском продукції і агрегованими виробничими чинниками. Виняток складають ВФ з нульовим заміщенням, наприклад, функція Леонтьева.

Щодо перспектив подальших досліджень у даному напрямі, то ми бачимо певний науковий інтерес у визначенні оптимальних співвідношень факторів для багатофакторних ВФ, а також для двофакторних ВФ, відмінних від функцій, узагальнених *CES*-функцією, – ВФ Аллена, Солоу та ін.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Пиндайк Р., Рабинфельд Д. Микроэкономика / Р. Пиндайк, Д. Рабинфельд. – Пер. с англ. С. Жильцов, А. Железниченко. – СПб. : Питер, 2002. – 608 с.

2. Гальперин В. М. Микроэкономика / В. М. Гальперин, С. М. Игнатьев, В. И. Моргунов. В 2-х томах.

Институт «Экономическая школа». – СПб, 2004. – 482 с.

3. Perloff J. M. (2014) Microeconomics. Chapter 7 : Costs. Available at : http://wps.aw.com/bp_perloff_microecon_7/242/61990/15869495.cw/content/index.html

4. Debertin D. L. (2012) Agricultural Production Economics. Amazon Createspace. p. 413.

5. Боровской Д. Н. Производственные функции и проблема выбора экономико-математической модели активного элемента / Д. Н. Боровской // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – №1(28). – С. 172-177.

6. Казакова М. В. Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста / М. В. Казакова, 2013 [Электронный ресурс]. – Режим доступа : ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf

7. Подладчиков В. Н. Микроэкономика. Производственные функции / Подладчиков В. Н. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://i.kpi.ua/podladchikov/-menu=micro-firm-2-.htm

8. Шумська С. С. Виробнича функція в економічному аналізі : теорія і практика використання / С. С. Шумська // Економіка прогнозування. – 2007. – № 2. – С. 138-153.

9. Черевко Є. В. Оптимальна фондоозброєність та початковий капітал / Є. В. Черевко // Вісник соціально-економічних досліджень. – Одеса, ОДЕУ. – 2007. – № 26. – С. 359-365.

10. Янковий В. О. Визначення оптимальної фондоозброєності в двофакторних виробничих функціях / В. О. Янковий / Матер. Міжнародної науково-практичної конф. «Міжнародне науково-технічне співробітництво : механізми та стратегії», 31 березня 2017 р. – Львів. – С. 113-116.

11. Янковий В. О. Еквімаржинальний принцип і виробничі функції / В. О. Янковий / Збірник матер. всеукр. науково-практич. конф. «Економічне зростання та конкурентоспроможність національного господарства : стратегії, напрями та пріоритети», 14-15 квітня 2017 р. – Київ. – С. 101-105.

12. Янковий В. О. Нові аналітичні можливості неокласичних виробничих функцій / В. О. Янковий // Вісник соціально-економічних досліджень. – Одеса, ОНЕУ. – 2016. – № 61. – С. 136-145.

13. Янковой В. А. Математический анализ неоклассических производственных функций / В. А. Янковой // Економіка : реалії часу. Науковий журнал. – 2016. – № 2(24). – С. 78-83 [Електронний ресурс] – Режим доступу до журн. : http://economics.opu.ua/files/archive/2016/No2/78.pdf

14. Янковий В. О. Оптимальна фондоозброєність і оцінка зон беззбиткового інвестування на базі виробничих функцій / В. О. Янковий // Проблеми і перспективи розвитку підприємництва. – Харків, 2016. – № 3 (14), т. 1. – С. 88-92.

15. Математическая экономика на персональном компьютере : Пер. с япон. / М. Кубинива, М. Табата, С. Табата, Ю. Хасэбэ; под ред. М. Кубинива. – М. : Финансы и статистика, 1991. – 304 с.

16. Янковий В. О. До проблеми оптимального поєднання факторів у рамках виробничої функції / В. О. Янковий // Науковий вісник Чернівецького університету : Економіка. – Вип. 777-778. – Чернівці, 2016. – С. 12-19.

17. Янковий В. О. Особливості визначення оптимальної фондоозброєності на базі лінійної виробничої функції і функції Леонтьєва / В. О. Янковий // Вісник Хмельницького національного університету. – Хмельницький, 2016. – № 4, т. 2. – С. 281-285.

REFERENCES:

1. Pindayk R., Rabinfel'd D. Mikroekonomika / R. Pindayk, D. Rabinfel'd. – Per. s angl. S. Zhil'tsov, A. Zheleznichenko. – SPb. : Piter, 2002. – 608 s.

2. Gal'perin V. M. Mikroekonomika / V. M. Gal'perin, S. M. Ignat'ev, V. I. Morgunov. V 2-kh tomakh. Institut "Ekonomicheskaya shkola". – SPb, 2004. – 482 s.

3. Perloff J. M. (2014) Microeconomics. Chapter 7 : Costs. Available at : http://wps.aw.com/bp_perloff_microecon_7/242/61990/15869495.cw/content/index.html

4. Debertin D. L. (2012) Agricultural Production Economics. Amazon Createspace. p. 413.

5. Borovskoy D. N. Proizvodstvennye funktsii i problema vybora ekonomiko-matematicheskoy modeli aktivnogo elementa / D. N. Borovskoy // Radioelektronni i komp'yuterni sistemi. – 2008. – № 1(28). – S. 172-177.

6. Kazakova M. V. Analiz svoystv proizvodstvennykh funktsiy, ispol'zuemykh pri dekompozitsii ekonomicheskogo rosta / M. V. Kazakova, 2013 [Elektronnyy resurs]. – Rezhim dostupa : ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf

7. Podladchikov V. N. Mikroekonomika. Proizvodstvennye funktsii / Podladchikov V. N. [Elektronnyy resurs]. – Rezhim dostupa : http://i.kpi.ua/podladchikov/-menu=micro-firm-2-.htm

8. Shumska S. S. Vyrobnycha funktsiia v ekonomichnomu analizi : teoriia i praktyka vykorystannia / S. S. Shumska // Ekonomika prohnozuvannia. – 2007. – # 2. – S. 138-153.

9. Cherevko Ye. V. Optymalna fondoozbroienist ta pochatkovyi kapital / Ye. V. Cherevko // Visnyk sotsialno-ekonomichnykh doslidzhen. – Odesa, ODEU. – 2007. – # 26. – S. 359-365.

10. Yankovyi V. O. Vyznachennia optymalnoi fondoozbroienosti v dvofaktornykh vyrobnychykh funktsiiakh / V. O. Yankovyi / Mater. Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konf. «Mizhnarodne naukovo-tekhnichne spivrobitnytstvo : mekhanizmy ta stratehii», 31 bereznia 2017 r. – Lviv. – S. 113-116.

11. Yankovyi V. O. Ekvimarzhynalnyi pryntsyp i vyrobnychi funktsii / V. O. Yankovyi / Zbirnyk mater. vseukr. naukovo-praktych. konf. «Ekonomichne zrostannia ta konkurentospromozhnist natsionalnoho hospodarstva : stratehii, napriamy ta priorytety», 14-15 kvitnia 2017 r. – Kyiv. – S. 101-105.

12. Yankovyi V. O. Novi analitychni mozhlyvosti neoklasychnykh vyrobnychykh funktsii / V. O. Yankovyi // Visnyk sotsialno-ekonomichnykh doslidzhen. – Odesa, ONEU. – 2016. – # 61. – S. 136-145.

13. Yankovoi V. A. Matematycheskyi analyz neoklassycheskykh proyzvodstvennыkh funktsyi / V. A. Yankovoi // Ekonomika : realii chasu. Naukovyi zhurnal. – 2016. – # 2(24). – S. 78-83 [Elektronnyi resurs] – Rezhym dostupu do zhurn. : http://economics.opu.ua/files/archive/2016/No2/78.pdf

14. Yankovyi V. O. Optymalna fondoozbroienist i otsinka zon bezzbytkovoho investuvannia na bazi vyrobnychykh

funktsii / V. O. Yankovyi // Problemy i perspektyvy rozvytku pidpryiemnytstva. – Kharkiv, 2016. – # 3 (14), t. 1. – S. 88-92.
15. Matematicheskaya ekonomika na personal'nom komp'yutere : Per. s yapon. / M. Kubiniva, M. Tabata, S. Tabata, Yu. Khasebe; pod red. M. Kubiniva. – M. : Finansy i statistika, 1991. – 304 s.
16. Yankovyi V. O. Do problemy optymalnoho poiednannia faktoriv u ramkakh vyrobnychoi funktsii / V. O. Yankovyi // Naukovyi visnyk Chernivetskoho universytetu : Ekonomika. – Vyp. 777-778. – Chernivtsi, 2016. – S. 12-19.
17. Yankovyi V. O. Osoblyvosti vyznachennia optymalnoi fondoozbroienosti na bazi liniinoi vyrobnychoi funktsii i funktsii Leontieva / V. O. Yankovyi // Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. – Khmelnytskyi, 2016. – # 4, t. 2. – S. 281-285.

Yankovyi V.O.
Candidate of Economic Sciences,
Senior Lecturer at Department of Economics and Business Planning
Odessa National Economic University

SEARCHING FOR MANUFACTURER’S OPTIMUM IN N-FACTOR PRODUCTION FUNCTIONS

Theoretical, methodological and application aspects of basic microeconomics thesis for determining the optimal mix of resources in the N-factor production functions are discussed. In particular, it is proposed to apply the economic theory known as principle of equal margin, according to which weighted by prices marginal products of inputs should be aligned. Implementing these conditions, the company reaches a state of inner balance out the best combination of resources that, when given the total cost provides the largest output, or for a given output - the lowest overall cost of capital.

The proposed algorithm applied on the example of two-factor function, generalized by function with constant elasticity of substitution of factors (CES-function). These are Cobb-Douglas production function, linear function, Leontiev’s function. The determination of producer’s optimum reviewed on their case in two ways: on the basis of a single marginal rate of substitution of resources as well as through mathematical analysis of functions according to the criterion of "maximum output" provided identical results.

It is shown that the first method is much simpler, but it is suitable only for functions with nonzero substitution of resources. So for limitation production functions (e.g. Leontiev’s function) it can be used not as a result of zero marginal products of inputs.

The approach to determine of the producer’s optimum demonstrated by CES-function on the example of the private meat processing enterprise "Garmash". These revealed a non-optimal capital-labour ratio and let calculate the reserves of output potential if the surplus basic production funds would be liquidated.