ЦІНА ОПЦІОНУ В МОДЕЛІ БАШЕЛЬЄ З ОБМЕЖЕННЯМ

OPTION PRICE FOR BACHELIER MODEL WITH CONSTRAINTS

УДК 330.43+336.764.2

Янішевський В.С.
к.ф.-м.н.,
доцент кафедри технологій управління
Національний університет «Львівська політехніка»

Розроблено метод визначення розв'язків стохастичних рівнянь у фінансових моделях для заданих граничних умов. Метод ґрунтується на рівнянні Фоккера-Планка для густини умовної ймовірності, що відповідає стохастичному рівнянню. Побудовані розв'язки для густини умовної ймовірності на границях задовольняють нульовому потоку ймовірності. Шляхом відповідної підстановки задача зведена до побудови розв'язків з граничною умовою Неймана, для чого використані відомі методи математичної фізики. Розглянутий алгоритм продемонстрований на прикладі моделі Башельє для ціни акції. Визначена ціни європейського опціону типу кол, проведено порівняння з відомим результатом.

Ключові слова: *броунівський рух, стохастичні рівняння, рівняння Фоккера-Планка, модель Башельє, ціна опціону.*

Разработан метод определения решений стохастических уравнений в финансовых моделях для заданных граничных условий. Метод основан на уравнении Фоккера-Планка для плотности условной вероятности, что соответствует стохастической уравнению. Построенные решения для плотности условной вероятности на границах удовлетворяют нулевому потоку вероятности. Путем соответствующей подстановки задача сведена к построению решений с граничным условием Неймана, для чего использованы известные методы математической физики. Рассмотренный алгоритм продемонстрирован на примере модели Башелье для цены акции. Определенна цена европейского опциона типа кол, проведено сравнение с известным результатом.

Ключевые слова: *броуновское движение, стохастические уравнения, уравнения Фоккера-Планка, модель Башелье, цена опциона.*

A method of determination of solutions of stochastic equation in financial models with a given boundary conditions was developed. The method is based on Fokker–Planck equation for conditional probability density that corresponds to stochastic equation. The built solutions for conditional probability density satisfy zero probability flow at the boundaries. By means of substitution the problem was reduced to building solutions with Neumann boundary condition for which a well-known methods of mathematical physics were used. The algorithm considered here is demonstrated on the example of Bachelier model for assets pricing. The European option call prices was etermined. Comparisons with a known results were carried out.

Key words: *Brownian motion, stochastic equations, Fokker–Planck equation, Bachelier model, option price.*

Постановка проблеми. Стохастичні рівняння відіграють сьогодні центральну роль у моделюванні ціноутворення різноманітних фінансових інструментів: активів, цінних паперів, похідних фінансових інструментів та інших фінансових показників [1-3]. Вперше стохастична модель динаміки ціни акцій, що ґрунтувалась на броунівському русі, була побудована Башелье [1]. На її основі Башелье вивів формулу для ціни опціону. Проте моделі Башелье притаманний суттєвий недолік – ціна акції може набувати від'ємних значень, що не відповідає економічному змісту. Наступний важливий крок у стохастичному моделюванні цін фінансових активів був зроблений Самуельсоном [1; 2], який запропонував модель геометричного (економічного) броунівського руху. На основі моделі геометричного броунівського руху Блек і Шоулз відкрили формулу ціни опціонів [1-3].

Подальший розвиток стохастичного моделювання був пов'язаний з узагальненням моделі Блека-Шоулза [1]. Стохастичні рівняння застосовувались також для моделювання процентних ставок, часової структури дохідності облігацій [1; 3-5]. Ряду моделей притаманні ті ж недоліки, що і моделі Башельє – випадкова змінна може набувати від'ємних значень, що не узгоджується з економічним змістом фінансового показника. У зазначених випадках виникає потреба у побудові розв'язків з обмеженнями на границі недопустимих значень змінної, тобто обмеженням допустимої області. В інших задачах для відомих моделей існує необхідність пошуку розв'язків, що відповідають додатковим зовнішнім умовам.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. З того часу як Башельє, а значно пізніше Блек і Шоулз отримали формули для оцінки вартості опціонів [1; 2], відбувся розвиток та вдосконалення зазначених моделей. Зокрема у моделі Башель'є і моделі геометричного броунівського руху волатильність ціни активу є сталі величини. В результаті виникла чимала кількість моделей, де зміна волатильності також задається стохастичними рівняннями. Так, у відомій моделі Гестона [1; 6] волатильність описується стохастичним процесом Феллера, розглядається також процес Орнштейна-Уленбека для динаміки волатильності [7]. Стохастичні моделі використовуються також для опису процентних ставок, побудови часової структури дохідності облігацій [1; 4; 5]. Найбільш відомі серед них – моделі Мертона (еквівалентна моделі Башельє), Васічека (еквівалентна моделі Орштейна-Уленбека), модель Кокса–Інгерсолла–Росса (еквівалентна процесу Феллера) та ряд інших [1]. Модель Башельє для ціни облігації та модель Мертона для процентної ставки вирізняються своєю простотою. Подібно як і для моделі Башелье, випадкова змінна моделі Мертона набуває від'ємних значень, що також не узгоджується зі змістом процентної ставки.

Постановка задачі. Як ми вже зазначали, у ряді стохастичних фінансових моделей випадкова змінна набуває від'ємних значень, що не має економічного змісту. Одним із способів усунення цього недоліку – завдання обмеження на область визначення випадкової змінної. Досягнути цього можна за допомогою введення додаткових зовнішніх граничних умов для стохастичних рівнянь. Проте граничні умови доволі складно застосовувати у випадку самих стохастичних рівнянь, більш зручним є використання рівняння Фоккера – Планка для густини умовної ймовірності. Тоді граничній умові відповідатиме нульовий потік ймовірності [8, 9], що обмежуватиме область визначення змінної моделі. В даній роботі на прикладі моделі Башельє для ціни акції ми продемонструємо спосіб обмеження для моделі, де змінна величина набуває лише додатних значень.

Виклад основного матеріалу.

Граничні умови для стохастичних рівнянь

Розглянемо стохастичне рівняння динаміки ціни фінансового активу вигляду

$$dS = \mu(S)\,dt + \sigma(S)\,dW(t). \qquad (1)$$

Тут $\mu(S)$ – визначає дрейф ціни, $\sigma(S)$ – визначає її дисперсію (волатильність), які можуть залежати також від змінної моделі. Величина $dW(t)$, у рівнянні (1) задає стандартний вінерівський процес [1; 8], який визначаються характеристиками:

$$\langle dW(t)\rangle = 0,\ \langle dW(t)^2\rangle = dt.$$

Тут усереднення проводиться за всіма можливими реалізаціями вінерівського процесу.

Як відомо [1; 8], стохастичному рівнянню (1) відповідає рівняння Фоккера-Планка для густини ймовірності $P(S, t)$

$$\frac{\partial P(S,t)}{\partial t} + \frac{\partial \mu(S)P(S,t)}{\partial S} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma^2(S)P(S,t)}{\partial S^2} = 0. \qquad (2)$$

Рівнянню (2) задовольняє також густина умовної ймовірності $\Pi(S, t, S_0)$

$$P(S,t) = \int_D \Pi(S,t,S_0)P(S_0)dS_0, \qquad (3)$$

де $P(S_0)$ – густина ймовірності у початковий момент часу $t = 0$.

Інтегрування у (3) відбувається на всій області визначення змінної S. Як відомо [8; 9], рівняння (2) можна записати також у вигляді збереження потоку ймовірності $J(S, t)$

$$\frac{\partial P(S,t)}{\partial t} + \frac{\partial J(S,t)}{\partial S} = 0, \qquad (4)$$

де $J(S, t)$ визначається виразом

$$J(S,t) = \mu(S)P(S,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma^2(S)P(S,t)}{\partial S}. \qquad (5)$$

З умови нормування ймовірності випливає, що потік ймовірності на границях області дорівнює нулю. Ця умова буде використана нами для введення обмежень на область визначення змінної стохастичної моделі. А саме, пошук розв'язків моделі (1), які обмежені на границі G, здійснюється за умови рівності нулю потоку $J(S_G, t) = 0$ на цій границі. Неважко показати [8], що виконуючи у рівнянні $J(S_G, t) = 0$ заміну:

$$P(S,t) = \exp(\varphi(S))P_v(S,t),$$
$$\varphi(S) = 2\int \frac{\left(A(S) - B(S)B'(S)\right)}{B(S)^2}dS, \qquad (6)$$

для функції $P_v(S, t)$ на границі G виконуватиметься умова Неймана $\partial_S P_v(S_G, t) = 0$. В результаті побудова розв'язків рівняння (2) з додатковими граничними умовами зведеться до побудови розв'язків $P_v(S, t)$, що задовольняють умові Неймана на цій границі. Для побудови таких розв'язків $P_v(S, t)$ зручно використати методи розвинуті у задачах математичної фізики [10; 11].

Модель Башельє з обмеженням ($S > 0$)

Стохастична динаміка ціни акції у моделі Башельє задається рівнянням [1]:

$$dS = \mu\,dt + \sigma\,dW(t). \qquad (7)$$

де μ, σ – сталі величини.

Стохастичне рівняння (7) має наступний розв'язок [1]

$$S(t) = S_0 + \mu t + \sigma W(t), \qquad (8)$$

де S_0 – значення ціни акції в момент часу $t = 0$, вважається також, що $W(0) = 0$. Очевидно, змінна $S(t)$ у (8) може набувати значень на всій множині дійсних чисел $S(t) \in R$. На основі розв'язку (8) знайдемо, що ціна акції $S(t)$ в момент часу t нормально розподілена з наступними характеристиками:

$$\langle S(t)\rangle = S_0 + \mu t;\ \upsilon(t) = \upsilon\sqrt{t}. \qquad (9)$$

В результаті густину умовної ймовірності розподілу випадкової величини S запишемо у вигляді

$$\Pi(S,t,S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(S - S_0 - \mu t\right)^2}{\sigma^2 t}\right). \qquad (10)$$

На основі (10) знайдемо ймовірність того, що випадкова величина S в момент часу t набуває від'ємних значень

$$P_{S<0}(t) = \int_{-\infty}^{0} P(S,t,S_0)\,dS = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\langle S(t)\rangle}{\sqrt{2}\sigma(t)}\right)\right).$$

Очевидно, що ймовірність $P_{S<0}(t)$ зростатиме із збільшенням волатильності σ і зменшенням параметра μ. Зрозуміло, що середні значення цінових характеристик акцій є зваженими величинами як додатних так і від'ємних значень змінної S. Як ми вже зазначали, модель типу (7) часто використовується у різних дослідженнях через її простоту. Зокрема, таку ж модель застосовують для моделювання динаміки процентних ставок, де вона носить назву моделі Мертона [1].

Густину умовної ймовірності $\Pi(S, t, S_0)$ (3), тлумачать також як густину ймовірності переходу з точки $(S_0, 0)$ в точку (S, t) [8; 9]. З метою пошуку необхідних розв'язків наведемо ряд перетворення для густини ймовірності $P(S, t)$, на основі яких знайдемо розв'язок для густини умовної ймовірності $\Pi(S, t, S_0)$ з граничною умовою.

Отже, підставляючи параметри моделі (7) у рівняння (2), отримаємо

$$\frac{\partial P(S,t)}{\partial t}+\mu\frac{\partial P(S,t)}{\partial S}-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P(S,t)}{\partial S^2}=0. \quad (11)$$

Наступним кроком у рівнянні (11) виконаємо заміну

$$P(S,t)=\exp\left(\frac{2\mu S}{\sigma^2}\right)P_v(S,t), \quad (12)$$

де функція $P_v(S, t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial P_v(S,t)}{\partial t}-\mu\frac{\partial P_v(S,t)}{\partial S}-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P_v(S,t)}{\partial S^2}=0. \quad (13)$$

Як ми зазначали раніше (див. формулу (6)) на основі розв'язку $P_v(S, t)$ будується розв'язок з граничною умовою Неймана в точці $S = 0$. Тоді розв'язок $P(S, t)$ буде задовольняти нульовому потоку в точці $S = 0$, що відповідно обмежуватиме область визначення змінної у моделі Башельє для $S > 0$.

Для пошуку зазначеного розв'язку $P_v(S, t)$ здійснимо ряд перетворень у рівнянні (13). Спочатку усунемо доданок з першою похідною за S у рівнянні (13) за допомогою заміни:

$$P_v(S,t)=F(S,t)P_1(S,t);$$
$$F(S,t)=\exp\left(-\frac{\mu S}{\sigma^2}-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}t\right). \quad (14)$$

Функція $P_1(S, t)$ задовольняє таке рівняння

$$\frac{\partial P_1(S,t)}{\partial t}-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P_1(S,t)}{\partial S^2}=0. \quad (15)$$

Отримане рівняння (15) відоме у математичній фізиці і описує поширення тепла [8; 9]. Відомий розв'язок $\Pi_1(S, t, S_0)$ задачі Коші для цього рівняння з початковою умовою $\Pi_1(S,t,S_0)\xrightarrow[t\to 0]{}\delta(S-S_0)$, який носить назву фундаментального розв'язку. Функція $\Pi_1(S, t, S_0)$ є також функцією Гріна рівняння (15) і визначається наступним виразом [8]

$$\Pi_1(S,t,S_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left(-\frac{(S-S_0)^2}{2\sigma^2 t}\right). \quad (16)$$

Наведений розв'язок заданий на усій осі $S \in R$ і задовольняє граничним умовам на нескінченості

$$\Pi_1(S,t,\pm\infty)=\Pi_1(\pm\infty,t,S_0)=0.$$

На основі $\Pi_1(S, t, S_0)$ отримаємо функцію Гріна функцію $\Pi_v(S, t, S_0)$ для рівняння (13):

$$\Pi_v(S,t,S_0)=F(S,t)\Pi_1(S,t,S_0)F^{-1}(S_0),$$
$$\Pi_v(S,t,S_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left(-\frac{(S-S_0+\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right), \quad (17)$$

а також отримаємо зв'язок з густиною умовної ймовірності $\Pi_1(S, t, S_0)$ (також функцією Гріна рівняння (11))

$$\Pi(S,t,S_0)=\exp\left(\frac{2\mu S}{\sigma^2}\right)\Pi_v(S,t,S_0)\exp\left(-\frac{2\mu S_0}{\sigma^2}\right). \quad (18)$$

Здійснюючи підстановку (17) у (18) отримаємо

$$\Pi(S,t,S_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left(-\frac{(S-S_0-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right). \quad (19)$$

Зрозуміло, що розв'язок співпадає з наведеним у (10). Поряд з цим ми визначили $\Pi_v(S, t, S_0)$, на основі якого побудуємо розв'язок з граничною умовою Неймана у $S = 0$.

Загальний спосіб побудови таких розв'язків для функцій Гріна рівняння Шредінгера розглянутий у [10; 11]. Як відомо, рівняння Шредінгера зводиться до рівняння Фоккера-Планка введенням уявного часу, тому результати отримані для функцій Гріна легко переносяться на випадок густини умовної ймовірності [9; 12].

Для застосування зазначеного методу необхідно знайти перетворення Лапласа за часовою змінною від $\Pi_v(S, t, S_0)$

$$K_v(S,s,S_0)=\int_0^\infty \Pi_v(S,t,S_0)e^{-st}dt. \quad (20)$$

Безпосереднім інтегрування у (20) отримаємо [13] зображення Лапласа $K_v(S, s, S_0)$

$$K_v(S,s,S_0)=\begin{cases}\exp\left((S-S_0)\dfrac{\sqrt{\mu^2+2s\sigma^2}-\mu}{\sigma^2}\right), & S<S_0;\\ \exp\left(-(S-S_0)\dfrac{\sqrt{\mu^2+2s\sigma^2}+\mu}{\sigma^2}\right), & S>S_0.\end{cases} \quad (21)$$

Далі на основі знайденого зображення побудуємо функцію $K_v^N(S,s,S_0)$, що задовольняє умові Неймана у точці $S = 0$ ($\partial_S K_v^N(S,s,S_0)\big|_{S=0}$). Шукана функція $K_v^N(S,s,S_0)$ буде сумою вихідної $K_v^N(S,s,S_0)$ та складової побудованої за певним правилом [10; 11] на основі $K_v(S, s, S_0)$. В результаті для $K_v^N(S,s,S_0)$ запишемо:

$$K_v^N(S,s,S_0)=K_v(S,s,S_0)-\Delta K_v(S,s,S_0), \quad (22)$$

$$\Delta K_v(S,s,S_0)=\frac{\partial K_{v,S_0}(S,s,0)\,\partial K_{v,S}(0,s,S_0)}{\partial^2 K_{v,S_0,S}(0,s,0)}. \quad (23)$$

У чисельнику формули (23) присутні похідні першого порядку за S і S_0 в точках S, $S_0 = 0$, у знаменнику – похідна другого порядку за S і S_0 в точках S, $S_0 = 0$. Побудоване таким чином зображення Лапласа $K_v^N(S,s,S_0)$ густини умовної ймовірності задовольняє умові Неймана в точці $S = 0$ і визначене на півосі S, $S_0 \geq 0$. Безпосереднім обчисленням на основі формул (21) і (23) знайдемо

$$\Delta K_v(S,s,S_0)=\frac{\left(\mu-\sqrt{\mu^2+2s\sigma^2}\right)}{\sqrt{\mu^2+2s\sigma^2}\left(\mu+\sqrt{\mu^2+2s\sigma^2}\right)}\times$$
$$\times\exp\left(-(S-S_0)\frac{\mu}{\sigma^2}-(S+S_0)\frac{\sqrt{\mu^2+2s\sigma^2}}{\sigma^2}\right). \quad (24)$$

Тоді зображення Лапласа $K^J(S, s, S_0)$ знайдене на основі $K_v^N(S,s,S_0)$

$$K^J(S,s,S_0)=\exp\left(\frac{2\mu S}{\sigma^2}\right)K_v^N(S,s,S_0)\exp\left(-\frac{2\mu S_0}{\sigma^2}\right) \quad (25)$$

задовольняє умову рівності нулю потоку ймовірності в точці $S = 0$. Відповідно, підставляючи вирази (21), (24) у (25) отримаємо:

$$K^J(S,s,S_0)=K(S,s,S_0)-\Delta K(S,s,S_0), \quad (26)$$

$$\Delta K(S,s,S_0)=\frac{\left(\mu-\sqrt{\mu^2+2s\sigma^2}\right)}{\sqrt{\mu^2+2s\sigma^2}\left(\mu+\sqrt{\mu^2+2s\sigma^2}\right)}\times$$
$$\times\exp\left(\left(S-S_0\right)\frac{\mu}{\sigma^2}-\left(S+S_0\right)\frac{\sqrt{\mu^2+2s\sigma^2}}{\sigma^2}\right). \qquad (27)$$

Здійснюючи обернене перетворення Лапласа [14] для (27), отримаємо густину умовної ймовірності для моделі Башельє задану на півосі

$$\Pi^J(S,t,S_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\left(\exp\left(-\frac{(S-S_0-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)+\right.$$
$$\left.+\exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}S_0\right)\exp\left(-\frac{(S+S_0-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)\right)$$
$$-\frac{2\mu}{\sigma^2}\exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}S_0\right)\left(1-\mathrm{N}\left(\frac{S+S_0+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right). \qquad (28)$$

Тут означено інтегральну функцію нормального розподілу

$$\mathrm{N}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx.$$

Таким чином, формула (28) дає розв’язок поставленої задачі – визначає густину умовної ймовірності в моделі Башельє для додатних значень випадкової змінної.

Зазначимо, дещо подібний метод обмеження для стохастичного рівняння використовувався у [15], де замість умови нульового потоку на границі обмеження використовувалась умова Діріхле та відповідний розв’язок для функції Гріна [10; 11].

Знайдена $\Pi^J(S, t, S_0)$ дозволяє визначити характеристики моделі і, зокрема, ціну європейського опціону кол. Як відомо [1], ціну опціону можна визначити як дисконтоване за безризиковою ставкою r (у формулі (28) слід здійснити заміну $\mu\to r$) середнє значення платіжної функції

$$C^J(T)=\exp(-rT)\int_0^\infty\Pi^J(S,T,S_0)(S-K)^+dS. \qquad (29)$$

Тут позначена платіжна функція

$$(S-K)^+=\begin{cases}(S-K), & S>K;\\ 0, & S<K,\end{cases} \qquad (30)$$

де K – страйк ціна, T – термін до виконання опціону.

Підставляючи розв’язок (28) у формулу (29) в результаті інтегрування для моделі Башельє на півосі отримаємо формулу для ціни опціону:

$$C^J(T)=C_0(T)+\Delta C(T),$$
$$C_0(T)=e^{-rT}\left(\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\sigma\exp\left(\frac{(S_0-K+rT)^2}{2T\sigma^2}\right)+(S_0-K+rT)\mathrm{N}\left(\frac{S_0-K+rT}{\sqrt{T}\sigma}\right)\right),$$
$$\Delta C(T)=\frac{\sigma^2}{2r}e^{-rT}\left[\exp\left(-\frac{2rS_0}{\sigma^2}\right)\left(1-\mathrm{N}\left(\frac{S_0+K-rT}{\sqrt{T}\sigma}\right)\right)-\right.$$
$$\left.-\exp\left(\frac{2rK}{\sigma^2}\right)\left(1-\mathrm{N}\left(\frac{S_0+K+rT}{\sqrt{T}\sigma}\right)\right)\right]. \qquad (31)$$

Тут через $C_0(T)$ позначена відома формула Башельє для європейського опціону кол [1], доданок $\Delta C(T)$ зумовлений обмеженням моделі Башельє на піввісь. Можна показати, що $\Delta C(T) > 0$, тобто ціна опціону зростає. Серед особливостей доданку $\Delta C(T)$ виділимо його залежність від ціни S_0 також у випадку $K = S_0$, в той час як для стандартної моделі Башельє $C_0(T)$ така залежність відсутня.

Висновки з проведеного дослідження. В даній роботі розглянуто спосіб побудови розв’язків стохастичних фінансових моделей, що задовольняють певним граничним умовам. Для цього використовується розв’язки рівняння Фоккера-Планка для густини умовної ймовірності. Введення обмежень для випадкової змінної еквівалентне побудові розв’язків з нульовим потоком ймовірності на границях обмежень. Пошук зазначених розв’язків зручно звести до пошуку розв’язків, що задовольнять умовам Неймана на границях області. У свою чергу подібна задача вивчається у математичній фізиці – побудова функцій Гріна рівняння Шредінгера, що задовольняють умові Неймана. Застосування зазначених методів дозволяє розробити ефективний алгоритм для побудови розв’язків стохастичних рівнянь для заданих граничних умов.

Запропонований спосіб застосований до моделі Башельє цінової динаміки акцій, для якої отриманий розв’язок заданий для додатних значень цінової змінної $S > 0$. Отримано також формула ціни опціону для з урахуванням обмеження в моделі Башельє. Більш детальний аналіз отриманої формули опціону з використанням статистичних даних буде предметом наступних досліджень.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансо1. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики : В 2 т. Т. 1 : Факты, модели. М.: МЦНМО, 2016. 440 с.

2. A. L. Lewis. Option Valuation under Stochastic Volatility / A. L. Lewis. – Finance Press, 2000. – 351 p.

3. John C. Hull. Options, futures, and other derivatives / John C. Hull. – New York: Pearson Education, 2018. – 868 p.

4. Люу Ю-Д. Методы и алгоритмы финансовой математики / Ю-Д. Люу. [Пер. с англ.] – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 751 с.

5. P. Wilmott. Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering / P. Wilmott. – John Wiley & Sons, Chichester, 1998. – 739 p.

6. Mark Joshi. More mathematical finance / Mark Joshi. – Melbourne: Pilot Whale Press, 2011. – 484 p.

7. Sergii Kuchuk-Iatsenko. Option pricing in the model with stochastic volatility driven by Ornstein–Uhlenbeck process. Simulation / Sergii Kuchuk-Iatsenko, Yuliya Mishura // Modern Stochastics: Theory and Applications. – 2015. – no. 2. – P. 355-369.

8. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках / Гардинер К. В. [Пер. с англ.] – М.: Мир, 1986. – 526 с.

9. H. Risken. The Fokker-Planck Equation – Methods of Solution and Applications / H. Risken [second edition] – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 472 p.

10. Grosche C. δ-function perturbations and boundary problems by path integration. Annalen der Physik, 1993, vol. 2(6), p. 557-589.

11. C.Grosche and F.Steiner: Table of Feynman Path Integrals; to appear in Springer Tracts in Modern Physics, 1998. – 449 p.

12. H. Kleinert. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics and financial markets / H. Kleinert. – Third edition. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, 2004. – 1932 p.

13. Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., Marichev O.I. Integrals and Series. Direct Laplace Transforms / Prudnikov A.P. – New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1992. – 619 p.

14. Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., Marichev O.I. Integrals and Series, Volume 5: Inverse Laplace Transforms / Prudnikov A.P. – New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1992. – 619 p.

15. Marc Decaps, Ann De Scheppe, Marc Goovaerts. Applications of delta-function perturbation to the pricing of derivative securities. Physica A, Elsevier, 2004, 342, pp. 677-692.

REFERENCES:

1. Shiryaev A. N. (2016) Osnovy stokhasticheskoy finansovoy matematiki: V 2 t. T. 1: Fakty, modeli [Essentials of Stochastic Finance: In 2 V. V. 1: Facts, Models]. Moscow: MCCME. (in Russian)

2. A. L. Lewis. Option Valuation under Stochastic Volatility / A. L. Lewis. – Finance Press, 2000. – 351 p.

3. John C. Hull. Options, futures, and other derivatives / John C. Hull. – New York: Pearson Education, 2018. – 868 p.

4. Lyuu Yu-D. (2007) Metody i algoritmy finansovoy matematiki [Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, and Algorithms]. Moscow: BINOM. Knowledge Laboratory. (in Russian)

5. P. Wilmott. Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering / P. Wilmott. – John Wiley & Sons, Chichester, 1998. – 739 p.

6. Mark Joshi. More mathematical finance / Mark Joshi. – Melbourne: Pilot Whale Press, 2011. – 484 p.

7. Sergii Kuchuk-Iatsenko. Option pricing in the model with stochastic volatility driven by Ornstein–Uhlenbeck process. Simulation / Sergii Kuchuk-Iatsenko, Yuliya Mishura // Modern Stochastics: Theory and Applications. – 2015. – no. 2. – P. 355-369.

8. Gardiner K. V. (1986) Stokhasticheskie metody v estestvennykh naukakh [Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences]. Moscow: Mir. (in Russian)

9. H. Risken. The Fokker-Planck Equation – Methods of Solution and Applications / H. Risken [second edition] – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 472 p.

10. Grosche C. δ-function perturbations and boundary problems by path integration. Annalen der Physik, 1993, vol.2(6), p. 557-589.

11. C. Grosche and F. Steiner: Table of Feynman Path Integrals; to appear in Springer Tracts in Modern Physics, 1998. – 449 p.

12. H. Kleinert. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics and financial markets / H. Kleinert. – Third edition. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, 2004. – 1932 p.

13. Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., Marichev O.I. Integrals and Series. Direct Laplace Transforms / Prudnikov A.P. – New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1992. – 619 p.

14. Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., Marichev O.I. Integrals and Series, Volume 5: Inverse Laplace Transforms / Prudnikov A.P. – New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1992. – 619 p.

15. Marc Decaps, Ann De Scheppe, Marc Goovaerts. Applications of delta-function perturbation to the pricing of derivative securities. Physica A, Elsevier, 2004, 342, pp. 677-692.

Yanishevsky V.S.
Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor at the Department of Management Technologies
of National University “Lviv Politechnic”

OPTION PRICE FOR BACHELIER MODEL WITH CONSTRAINTS

A method of finding solutions of stochastic equations of financial models with given boundary conditions was developed. Because boundary conditions are difficult to apply in case of stochastic equations, the method is based on Fokker–Planck equation for conditional probability density. It is shown that the boundary condition which limits the definition domain of a model’s variable must have a respective zero probability flow. That’s why finding a solution of conditional probability density (according to stochastic model) is done providing that the probability flow at the boundary equals to zero. By substitution the problem is reduced to building solution with Neumann boundary condition for which a well-known methods of mathematical physics were used.

A list of stochastic models in financial modeling is diverse. A considerable part of them are a generalization of geometric Brownian motion model and Black-Scholes model for option pricing accordingly. An important direction of stochastic modeling is related to interest rates, time based profitability structure. Many of mentioned models have same drawbacks that the Bachelier models, mainly that the stochastic variable can have negative values, which doesn’t comply with the economical meaning of the financial indicator.

Proposed method gives an ability to build solutions with constraint at the bound of unacceptable values of the variable. As a result the variable can have values only from allowed domain of values. Also one can build new solutions for stochastic financial models, which are conditioned with certain external constraints. Introduction of boundary conditions in modeling of price dynamics of assets will also influence estimates of derivative financial instruments.

Developed algorithm is demonstrated on the example of Bachelier model for assets price. For Bachelier model of assets price dynamics a solution was obtained for conditional probability density which is defined only for positive values of price variable. Based on conditional probability density, a formula of option call price was calculated. The stated formula of option price contains two terms, one of them is a known Bachelier result $C_0(T)$, the other $\Delta C(T)$ is due to the Bachelier model was constraint to semiaxis. It was shown that the additional term is greater than zero $\Delta C(T) > 0$, meaning that option price is increasing. Among the features of additional term one can outline its dependency from assets price S_0, even in case of $K = S_0$ (strike price of assets equals to the initial assets price), which is not a characteristic of a standard Bachelier $C_0(T)$ model.