ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВАЯ МОДЕЛЬ ФИНАНСОВОЙ ОТЧЕТНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

THEORETICAL-GRAPHIC MODEL ENTERPRISE FINANCIAL REPORTING

УДК 519. 876. 2:658. 14/17
https://doi.org/10.32843/infrastruct34-49

Мартынова Е.В.
к.э.н., доцент,
доцент кафедры высшей математики
и экономико-математических методов
Харьковский национальный
университет имени Семена Кузнеца

С самого начала возникновения методы моделирования с использованием теории графов находили свое применение в самых различных и внешне несхожих областях: химии, электродинамике, географии и т. д. Статья посвящена анализу известных математических моделей развития малого предприятия и разработке теоретико-графовой динамической однопродуктовой модели финансовой деятельности предприятия. Актуальность рассматриваемой проблемы состоит в том, что на современном этапе развития экономики, как в нашей стране, так и за рубежом, в системе финансового управления предприятием все большее внимание уделяется вопросу организации денежных потоков. Именно они оказывают существенное влияние на конечные результаты хозяйственной деятельности предприятия. Вместе с тем следует отметить, что концепция денежного потока предприятия как самостоятельного объекта финансового управления не получила достаточного отражения не только в отечественной, но и в зарубежной литературе по вопросам финансового менеджмента.
Ключевые слова: *моделирование, финансовая деятельность предприятия, денежный поток, граф, матрица сечений.*

З самого початку виникнення методи моделювання з використанням теорії графів знаходили своє застосування в різних і зовні несхожих галузях: хімії, електродинаміці, географії тощо. Стаття присвячена аналізу відомих математичних моделей розвитку малого підприємства та розробленню теоретико-графової динамічної однопродуктової моделі фінансової діяльності підприємства. Актуальність цієї проблеми полягає в тому, що на сучасному етапі розвитку економіки, як у нашій країні, так і за кордоном, у системі фінансового управління підприємством усе більша увага приділяється питанню організації грошових потоків. Саме вони справляють істотний вплив на кінцеві результати господарської діяльності підприємства. Водночас слід зазначити, що концепція грошового потоку підприємства як самостійного об'єкта фінансового управління не отримала достатнього відображення не тільки у вітчизняній, але і в зарубіжній літературі з питань фінансового менеджменту.
Ключові слова: *моделювання, фінансова діяльність підприємства, грошовий потік, граф, матриця перетинів.*

From the very beginning, modeling methods using graph theory found their application in various and superficially dissimilar areas: chemistry, electrodynamics, geography, etc. This article is devoted to the analysis of well-known mathematical models for the development of a small enterprise and the development of a graph-theoretic dynamic one-product financial model the activities of the enterprise. The relevance of the problem is that at the present stage of economic development, both in our country and abroad, in the system of financial management of an enterprise, more and more attention is paid to the organization of cash flows. They have a significant impact on the final results of the economic activity of the enterprise. However, it should be noted that the concept of cash flow of the enterprise, as an independent object of financial management, has not received sufficient reflection, not only in domestic but also in foreign literature on financial management. The financial activity of the enterprise is proposed to be considered as a coherent oriented graph on which the first Kirchhoff law is defined. Also considered is the task of analyzing the dynamics of various types of small enterprises, the production process of which is described by different production functions, including non-linear ones. When solving problems associated with the dynamics of the development of a small enterprise, matrix graph theory, differential equations, and stochastic analysis were used. The dynamics of the development of a small enterprise and the financial circuit on it using a combination of several approaches: the construction of a network model of the enterprise and the analysis of the dynamic equations of enterprise development are considered. A system of equations is obtained that describes the dynamics of the development of a small enterprise and the circuit of its financial resources. This allows managers to make effective management decisions. In the future, it is planned to consider a nonlinear modification of the model and investigate the solution of the corresponding nonlinear degenerate differential equations.
Key words: *modeling, financial activity of an enterprise, cash flow, graph, section matrix.*

Постановка проблемы. Анализ динамики и финансового кругооборота малых предприятий является основным элементом моделирования и оценки их деятельности. Построение модели финансовой отчетности предприятия необходимо для его развития и эффективно только в случае комбинирования разных подходов.

Анализ последних исследований и публикаций. В последнее время все больше появляется работ, посвященных использованию методов теории графов при моделировании экономических задач. Исследованию этих вопросов посвящены работы таких ученых, как С.Р. Хачатрян, М.В. Пинегина, В.П. Буянов, М.Ф. Бондаренко, Н.В. Билоус, А.Г. Руткас, Д. Филлипс, А. Гарсиа-Диас и др. При анализе деятельности предприятия существенную роль играет динамика развития основных производственных фондов. Динамические связи описываются системой дифференциально-алгебраических уравнений вида: $Ax' + Bx = f(t)$. Исследованию решений этого уравнения посвящены работы К. Вейерштрасса и Л. Кронекера.

Постановка задачи. В этой работе предлагаются математические методы, используемые в финансовом анализе, которые представляют совокупность подходов и методов, позволяющих: соотносить будущие потоки доходов с текущей стоимостью, измерять доходы от альтернативных вариантов инвестирования, проводить обработку данных. Осуществляется это с целью предсказания реальных характеристик производственно-экономической системы, чтобы руководителям было легче принимать решения на основании анализа, произведенного с помощью информационных технологий.

Изложение основного материала исследования. Считается, что малое предприятие может развиваться как за счет внутренних источников, так и за счет внешней финансовой поддержки в виде инвестиций. Основные производственные фонды – единственный лимитирующий фактор, определяющий выпуск продукции. Малое предприятие функционирует при неизменной технологии, что предполагает постоянство его фондоотдачи.

С учетом сделанных предпосылок производственная деятельность описывается однофакторной производственной функцией типа Леонтьева, а темпы развития предприятия определяются динамикой основных производственных фондов [10].

Зависимости между основными переменными модели малого предприятия представлены следующей системой уравнений:

$$P(t) = f \cdot A(t); \tag{1}$$

$$\text{М}^{\text{об}}(t) = (1-c)\cdot P(t); \tag{2}$$

$$\text{М(t)} = \text{М}^{об}(t) - N(t); \tag{3}$$

$$N(t) = \tau_1 P(t) + \tau_2 k_\Lambda (1-\nu) M(t); \tag{4}$$

$$\frac{dA}{dt} = \nu M(t) + I(t); \tag{5}$$

$$t \in [0,T]; \quad \nu \in [0,1]; \quad k_\Lambda \in (0,1], \tag{6}$$

где $P(t)$ – выпуск продукции в момент t в стоимостном выражении; f – показатель фондоотдачи; $A(t)$ – стоимость основных производственных фондов; c – удельная себестоимость выпуска продукции в стоимостном выражении; $\text{М}^{\text{об}}(t)$ – общая прибыль малого предприятия; $\text{М}(t)$ – чистая прибыль малого предприятия за вычетом налоговых отчислений; $N(t)$ – сумма налоговых отчислений; τ_1, τ_2 – ставки налогообложения на объем выпуска и прибыль соответственно; ν – доля чистой прибыли, отчисляемой на реинвестирование, ($\nu \le \bar{\nu}$); k_Λ – коэффициент, отражающий долю не реинвестируемых средств прибыли, не имеющих льгот по налогообложению (не все реинвестируемые средства освобождаются от налогов), и оцениваемый статистическим путем; $I(t)$ – внешние инвестиции, полученные малым предприятием на безвозмездной основе.

При этом уравнения (1–6) имеют следующую экономическую интерпретацию: (1) – определяет линейную производственную функцию малого предприятия; (2) – характеризует процесс формирования его общей прибыли за вычетом издержек производства; (3) – описывает величину чистой прибыли за вычетом общей суммы налоговых отчислений; (4) – упрощенный алгоритм расчета налоговых отчислений, а льготы, предоставляемые предприятиям, реинвестирующим свою прибыль в производство, учитываются с помощью доли инвестиционных отчислений ν и коэффициента k_Λ (величина его обычно зависит от границы действия льгот $\nu \le \bar{\nu}$); (5) – описывает динамику прироста основных производственных фондов за счет собственных средств и внешних инвестиций.

Подставляя уравнения (2) и (4) в соотношение (3), получаем:

$$\begin{aligned} M(t) &= (1-c)P(t) - \tau_1 P(t) - \tau_2 k_\Lambda (1-\nu) M(t) = \\ &= P(t)[(1-c) - \tau_1] - \tau_2 k_\Lambda (1-\nu) M(t) \end{aligned}. \tag{7}$$

Выражая явным образом переменную $M(t)$, имеем:

$$M(t) = \frac{1-c-\tau_1}{1+\tau_2 k_\Lambda (1-\nu)} P(t). \tag{8}$$

Отсюда, подставляя (8) в (5), получаем:

$$\frac{dA}{dt} = \hat{a} P(t) + I(t), \text{ где } \hat{a} = \frac{(1-c-\tau_1)\nu}{1+\tau_2 k_\Lambda (1-\nu)}. \tag{9}$$

Получаем окончательно дифференциальное уравнение (к которому сводится система соотношений (1– 4)), имеющее следующий вид:

$$\frac{dA}{dt} = aA(t) + I(t), \text{ где } a = f\hat{a}. \tag{10}$$

Рассмотри три случая динамики инвестиций $I(t)$:

1) $I(t) = I_0 = const$;
2) $I(t) = \beta t$ (11)
3) $I(t) = Be^{\beta t}$.

Данные случаи соответствуют трем возможным стратегиям государственной поддержки малого предпринимательства: 1) постоянной – с фиксированными объемами инвестиций для каждого из периодов; 2) линейно возрастающей – с темпом роста инвестиций $\beta > 0$; 3) возрастающей – со средним темпом $\beta > 0$, но по нелинейному закону и с минимальным уровнем гарантированной государственной поддержки ($I(0) = B$ при $t = 0$).

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (5) для рассматриваемых правых частей имеет соответственно вид:

$$A(t) = (A_0 + \frac{I_0}{a})e^{at} - \frac{I_0}{a}, \tag{12}$$

$$A(t) = (A_0 + \frac{\beta}{a^2})e^{at} - \frac{\beta}{a^2}(at+1), \tag{13}$$

$$A(t) = (A_0 + \frac{B}{a-\beta})e^{at} - \frac{B}{a-\beta}e^{\beta t}, \tag{14}$$

где $A_0 = A(0)$. Сопоставляя темпы роста основных фондов для различных вариантов инвестирования малого предприятия, убеждаемся, что они, как и следовало ожидать, более высокие при более интенсивной финансовой поддержке. Однако они зависят и от параметров, характеризующих деятельность рассматриваемого экономического объекта, в частности, от структурных характеристик рассматриваемой системы, определяющихся размером a.

Математическая структура основного уравнения динамики малого предприятия (10), как и структура полученных решений (12) – (14), соответствуют результатам дифференциального анализа применительно к предприятию, как хозяйственному объекту. Однако экономическое содержание переменных, входящих в полученные решения, для сопоставляемых исследований различно и определяется исходными посылками рассматриваемых в каждом случае моделей.

Рассмотрим более сложный случай, при котором не только внешние, но и внутренние инвестиции малого предприятия являются функцией времени. Этот случай учитывается в модели путем описания динамики переменной, отражающей долю чистой прибыли, отчисляемой на реинвестирование, как известной функции времени $\nu(t)$ [2]. Заметим, что при любом виде функций $\nu(t)$ модель малого предприятия становится нелинейной.

По своему экономическому содержанию данная переменная управляющий параметр, характеризующий размер средств, направляемых на потребление и накопление. Поэтому введение в модель динамики переменной $\nu(t)$ описывает определенную стратегию поведения предприятия при распределении чистой прибыли.

Малое предприятие рассматривается на временном интервале $[0,T]$. Пусть $\nu(t)$ – известная монотонно возрастающая функция времени, для которой задан верхний предел изменения φ (определяемый экспертно или на основе статистического анализа $0<\varphi\le 1; \nu(T)=\varphi$). Внешние инвестиции являются некоторой функцией времени $I(t)$, причем $\int_0^t I(t)dt = I^t$. Требуется определить верхнюю границу изменения основных фондов малого предприятия $A(t)$ и оценить их величину к концу периода T.

С учетом сделанных предпосылок уравнение (10) имеет вид:

$$\frac{dA}{dt} = a(t)A(t) + I(t)\,, \qquad (15)$$

где $$a(t) = \frac{(1-c-\tau_1)\nu(t)}{1+\tau_2 k_\Lambda(1-\nu(t))} f\,. \qquad (16)$$

Соотношение (15) – нелинейное дифференциальное уравнение, решение которого зависит от вида функции $I(t)$. Если оно неразрешимо в явном виде относительно $A(t)$, его можно решать приближенными методами. Кроме того, для него можно определить верхнюю границу динамики $A(t)$. Проинтегрировав обе части уравнения на интервале от 0 до t, получаем:

$$A(t) - A(0) = \int_0^t a(t)A(t)dt + \int_0^t I(t)dt. \qquad (17)$$

С учетом того, что $A(0) = A_0$ и $\int_0^t I(t)dt = I^t$, получаем:

$$A(t) = A_0 + I^t + \int_0^t a(t)A(t)dt\,. \qquad (18)$$

Для уравнения (18) применима оценка Гронуолла-Беллмана:

$$A(t) \le (A_0 + I^t)e^{\int_0^t a(t)dt} \qquad (19)$$

Заметим, что $a(t)$ растет монотонно с ростом $\nu(t)$, что следует из соотношения (16). Следовательно, максимальное значение функция $a(t)$ достигает при $\nu(t)$ в конце периода T. Это позволяет получить верхнюю оценку динамики основных фондов в упрощенном виде:

$$A(t) \le (A_0 + I^t)e^{\bar{a}t}\,,\ \text{где}\ \bar{a} = a(T)\ \text{при}\ \nu(T) = \varphi\,. \qquad (20)$$

Для определенности зададим функцию $\nu(t)$ в виде следующей степенной функции:

$$\nu(t) = \gamma t^2\,, \qquad (21)$$

где γ – темп „наращивания" процесса реинвестирования средств малого предприятия.

В соответствии со сделанными предпосылками будем считать:

$$\nu(t) = \begin{cases} \gamma t^2 & при \quad t \le T \\ \varphi & при \quad t = T \end{cases} \qquad (22)$$

Так как $\nu(T) = \gamma T^2 = \varphi$ по определению заданной функции, получаем величину темпа реинвестирования:

$$\gamma = \frac{\varphi}{T^2}\,,\ \text{а также}\ \nu(t) = \frac{\varphi t^2}{T^2}\,. \qquad (23)$$

Полученное выражение позволяет определить параметр $a(t)$ в соответствии с формулой (16). Обозначив $f(1-c-\tau_1) = m$ и $\tau_2 k_\Lambda = n$, приходим к следующему выражению:

$$a(t) = \frac{m\frac{\varphi}{T^2}t^2}{1+n[1-\frac{\varphi}{T^2}t^2]} = \frac{m\varphi t^2}{T^2[1+n-\frac{n\varphi}{T^2}t^2]}\,. \qquad (24)$$

Подставив (24) в формулу (19), можно получить оценку для верхней границы фондов $A(t)$ для рассмотренного вида функций $\nu(t)$. С этой целью вычислим интеграл $E(t) = \int_0^t a(z)dz$. Очевидно, что

$$E(t) = \frac{m\varphi}{T^2}\int_0^t \frac{z^2}{1+n-\frac{n\varphi}{T^2}z^2}dz\,. \qquad (25)$$

Обозначим $g = 1+n\,;\ q = \frac{n\varphi}{T^2}$.
Тогда

$$E(t)=\frac{mq}{n}\int_0^t\frac{z^2dz}{g-qz^2}=-\frac{mq}{nq}\int_0^t\frac{g-qz^2-g}{g-qz^2}dz=$$

$$=\frac{m}{n}[-\int_0^t dz+g\int_0^t\frac{dz}{g-qz^2}],$$

$$E(t)=\frac{m}{n}[-t+g\int_0^t\frac{dz}{1-\frac{q}{g}z^2}]. \qquad (26)$$

Обозначив $\mu=\sqrt{\frac{q}{g}}$, из выражения (26), получаем:

$$E(t)=\frac{m}{n}[-t+\frac{1}{\mu}\int_0^t\frac{d\mu z}{1-(\mu z)^2}]=$$

$$=\frac{m}{n}[-t+\frac{1}{2\mu}\ln\left|\frac{1-\mu z}{1+\mu z}\right|\Bigg|_0^t]= \qquad (27)$$

$$=\frac{m}{n}[-t+\frac{1}{2\mu}\ln\left|\frac{1-\mu t}{1+\mu t}\right|].$$

Итак, оценка верхней границы основных фондов при $z=T$ в соответствии с формулой (19) имеет вид:

$$A(T)\le(A_0+I^T)e^{\frac{m}{n}[-T+\frac{1}{2\mu}\ln\left|\frac{1-\mu T}{1+\mu T}\right|]} \text{ или}$$

$$A(T)\le(A_0+I^T)\left|\frac{1-\mu T}{1+\mu T}\right|^{\frac{1}{2\mu}}e^{-\frac{mT}{n}}, \qquad (28)$$

где

$$m=f(1-c-\tau_1);\quad n=\tau_2k_\Lambda;\quad g=1+n;$$

$$q=\frac{n\varphi}{T^2};\quad \mu=\sqrt{\frac{n\varphi}{T^2(1-n)}}.$$

Величина верхней границы динамики основных фондов зависит от их начального уровня A_0, общего объема выделенных за период инвестиций I и от целого ряда других факторов. В число факторов, «форсирующих» динамику роста процесса, относятся переменные, определяющие эффективность производства и величину удельной прибыли малого предприятия (входят в параметр m); к числу факторов, «тормозящих» динамику, относятся переменные, ограничивающие долю инвестирования и характеризующие «налоговый пресс» на предприятие (входят в параметры n и μ).

Оценку динамики основных фондов малого предприятия можно осуществить также для случая изменяющейся во времени фондоотдачи $f(t)$. Этот случай соответствует внедрению новых технологий производства, обуславливающих рост эффективности и повышение производительности труда, и приводит к нелинейной модели. Общая оценка динамики фондов будет также описываться неравенством (19). Конкретная величина этой оценки будет определяться характером изменения функций фондоотдачи $f(t)$, входящей в переменную $a(t)$. Фактически данный случай означает использование в модели малого предприятия новой производственной функции. В связи с этим возникает задача проведения анализа динамики различных типов малых предприятий, производственный процесс которых описывается разными производственными функциями, в том числе и нелинейными.

Рассмотрим малое предприятие, функционирующее в условиях, описываемых той же системой предпосылок, которая используется в ранее рассмотренной модели. Однако вместо однофакторной производственной функции, описываемой соотношением (1), будем использовать нелинейные виды производственных функций [11].

Динамика развития малых предприятий часто характеризуется значительной нелинейностью. Так, на первых стадиях их роста могут наблюдаться значительные темпы развития, которые затем сменяются затухающей динамикой.

1 – линейная: $P(t)=f\cdot A(t)$

2 – степенная: $P(t)=\gamma\cdot\left[A(t)\right]^\alpha$

3 – с затухающим темпом роста: $P(t)=P(0)+$ $+\hat{p}\left[1-e^{A(t)}\right]$.

Для описания функционирования малого предприятия может быть использована степенная функция вида:

$$P(t)=\gamma A(t)^\alpha. \qquad (29)$$

При лимитирующем факторе основных производственных фондов она является частным случаем известной функции Кобба-Дугласа [4], имеющей вид:

$$P(t)=\gamma A(t)^\alpha L^\lambda,\quad \alpha+\lambda=1, \qquad (30)$$

где γ – параметр этой функции, L – трудовые ресурсы, α и λ – коэффициенты эластичности замены основных фондов и труда соответственно.

Используя соотношение (9), получаем основное уравнение динамики малого предприятия в случае степенной производственной функции, которая имеет вид:

$$\frac{dA}{dt}=\bar{a}\left[A(t)\right]^\alpha+I(t),\ \text{где}\ \bar{a}=\gamma\hat{a} \qquad (31)$$

Анализ уравнения (31) показал, что оно неразрешимо в явном виде для некоторых видов правых частей. Так для случаев $I(t)=I_0=const$ и $I(t)=\beta t$ это уравнение целесообразно решать приближенными методами.

В то же время для частного случая $I_0=0$ оно преобразуется в однородное уравнение Бернулли, решение которого может быть найдено методом постановки: $x(t)=\frac{1}{\left[A(t)\right]^{\alpha-1}}$. Уравнение (31) разрешимо также для случая $I(t)=\beta A(t)$, то есть когда поток государственных инвестиций пропорционален динамике основных фондов малого предприятия с коэффициентом пропорциональности $\beta, 0<\beta<1$. Иными словами, в рассматриваемом случае реализуется следующая стратегия государственной поддержки – чем больше предприятие, тем больше инвестиций ему выделяется. При этом уравнение (31) принимает вид:

$$\frac{dA}{dt}=\bar{a}[A(t)]^{\alpha}+\beta A(t)\,. \qquad (32)$$

Разделим обе части уравнения на $[A(t)]^{\alpha}$:

$$\frac{1}{[A(t)]^{\alpha}}\frac{dA}{dt}-\bar{a}-\beta\frac{1}{[A(t)]^{\alpha-1}}=0\,. \qquad (33)$$

Обозначим:

$$x(t)=\frac{1}{\left[A(t)\right]^{\alpha-1}}\,. \qquad (34)$$

Продифференцировав, имеем:

$$\frac{dx}{dt}=(1-\alpha)\left[A(t)\right]^{1-\alpha-1}\frac{dA}{dt} \text{ или}$$

$$\frac{1}{[A(t)]^{\alpha}}\cdot\frac{dA}{dt}=\frac{1}{1-\alpha}\frac{dx}{dt}\,. \qquad (35)$$

Подставим (34) и (35) в уравнение (33) и получим:

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{dx}{dt}-\beta x(t)-\bar{a}=0\,.$$

Преобразуя, получим следующее неоднородное линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt}-\beta(1-\alpha)x(t)=\bar{a}(1-\alpha)\,. \qquad (36)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\frac{dx}{dt}-\beta(1-\alpha)x(t)=0 \qquad (37)$$

имеет вид:

$$x(t)=c\cdot e^{\beta(1-\alpha)t}\,. \qquad (38)$$

Используя метод вариационной постоянной $c=c(t)$, получаем из уравнения (36) следующее соотношение для $c(t)$:

$$\frac{dc}{dt}\cdot e^{\beta(1-\alpha)t}+c(t)\beta(t-\alpha)\cdot e^{\beta(1-\alpha)t}-\beta(1-\alpha)\cdot e^{\beta(1-\alpha)t}=\bar{a}(1-\alpha)\,.$$

Преобразуя, имеем:

$$\frac{dc}{dt}=\bar{a}(1-\alpha)\cdot e^{\beta(\alpha-1)t} \qquad (39)$$

Интегрируем (39), получаем

$$c(t)=\bar{a}\frac{1-\alpha}{\beta(\alpha-1)}\cdot e^{\beta(\alpha-1)t}+C, \text{ или}$$

$$c(t)=-\frac{\bar{a}}{\beta}\cdot e^{\beta(\alpha-1)t}+C\,. \qquad (40)$$

Таким образом, подставив (40) в выражение (39), получаем:

$$x(t)=\left[-\frac{\bar{a}}{\beta}\cdot e^{\beta(\alpha-1)t}+C\right]\cdot e^{\beta(1-\alpha)t}=-\frac{\bar{a}}{\beta}+C\cdot e^{\beta(1-\alpha)t}. \qquad (41)$$

С учетом (34) имеем следующее выражение для $A(t)$:

$$A(t)=[x(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}=\left[-\frac{\bar{a}}{\beta}+C\cdot e^{\beta(1-\alpha)t}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Отсюда можем определить значение константы C из условия $t=0, A(0)=A_0$:

$$A_0=\left[-\frac{\bar{a}}{\beta}+C\right]^{\frac{1}{1-\alpha}};\; C=\frac{\bar{a}}{\beta}+A_0^{1-\alpha}$$

Итак, общее решение неоднородного дифференциального уравнения (32) имеет следующий вид:

$$A(t)=\left[(\frac{\bar{a}}{\beta}+A_0^{1-\alpha})e^{\beta(1-\alpha)}-\frac{\bar{a}}{\beta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad (42)$$

Качественный анализ динамики $A(t)$ из соотношения (42) свидетельствует, что рост основных фондов определяется в данной модели их начальным состоянием A_0, структурными характеристиками объекта $\bar{a}$, а также соотношением темпа роста инвестиции β и показателями эффективности производства α .

Рассмотрим динамику развития малого предприятия и финансовый кругооборот на нем с помощью комбинирования нескольких подходов:

1). Построение сетевой модели работы предприятия [6; 7; 9].

2). Анализ динамических уравнений развития предприятия [3].

Движение финансовых потоков на предприятии может быть представлено схемой:

Эту систему можно представить следующим образом:

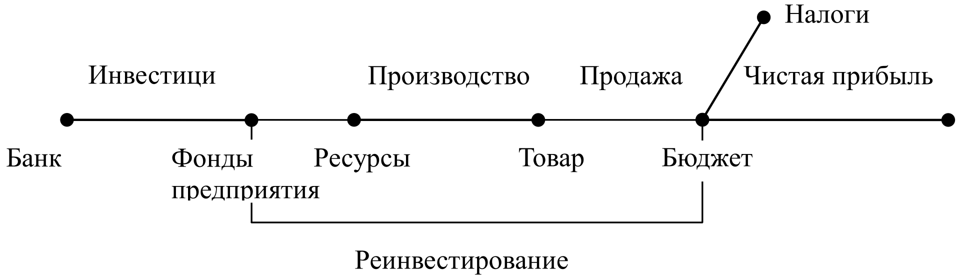

Рис. 1. Финансовый кругооборот малого предприятия

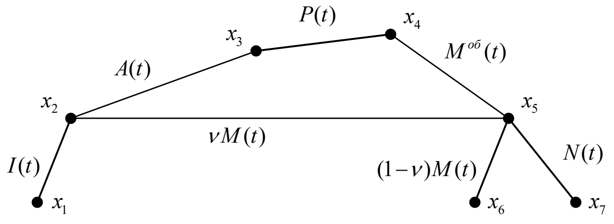

Рис. 2. Финансовые потоки малого предприятия

Таким образом, финансовую деятельность предприятия можно рассматривать как связный ориентированный граф, на котором определен первый закон Кирхгофа [1; 4; 8]. Этот граф содержит X вершин, Y дуг, каждой из которых ставится в соответствие ряд активных и пассивных элементов, а также последовательная переменная величина. Совокупность этих величин характеризуют состояние потокораспределения в сети.

Узлы графа G: x_1 – банк; x_2 – основные фонды предприятия; x_3 – ресурсы предприятия (сырье, оборудование, трудовые кадры); x_4 – произведенные товары; x_5 – бюджет предприятия (расчет баланса); x_6 – налоги;

Переменные и параметры имеют следующий экономический смысл: $I(t)$ – внешние инвестиции, полученные малым предприятием на безвозмездной основе; $A(t)$ – стоимость основных производственных фондов; $P(t)$ – выпуск продукции в момент t в стоимостном выражении; $M^{об}(t)$ – общая прибыль малого предприятия; $M(t)$ – чистая прибыль малого предприятия за вычетом налоговых отчислений; $N(t)$ – сумма налоговых отчислений; ν – доля чистой прибыли, отчисляемой на реинвестирование.

Для того, чтобы в полученной системе выполнялись законы сохранения Кирхгофа, введем фиктивный узел x_8 (внешнюю среду), который соединим с источником (x_1) и стоками (x_6, x_7). В новообразованном графе G выделим каркас T и найдем фундаментальные сечения $s_1, s_2, \ldots, s_6, s_7$ по дереву:

Соответствующая фундаментальная матрица сечений S_T будет иметь вид [5]:

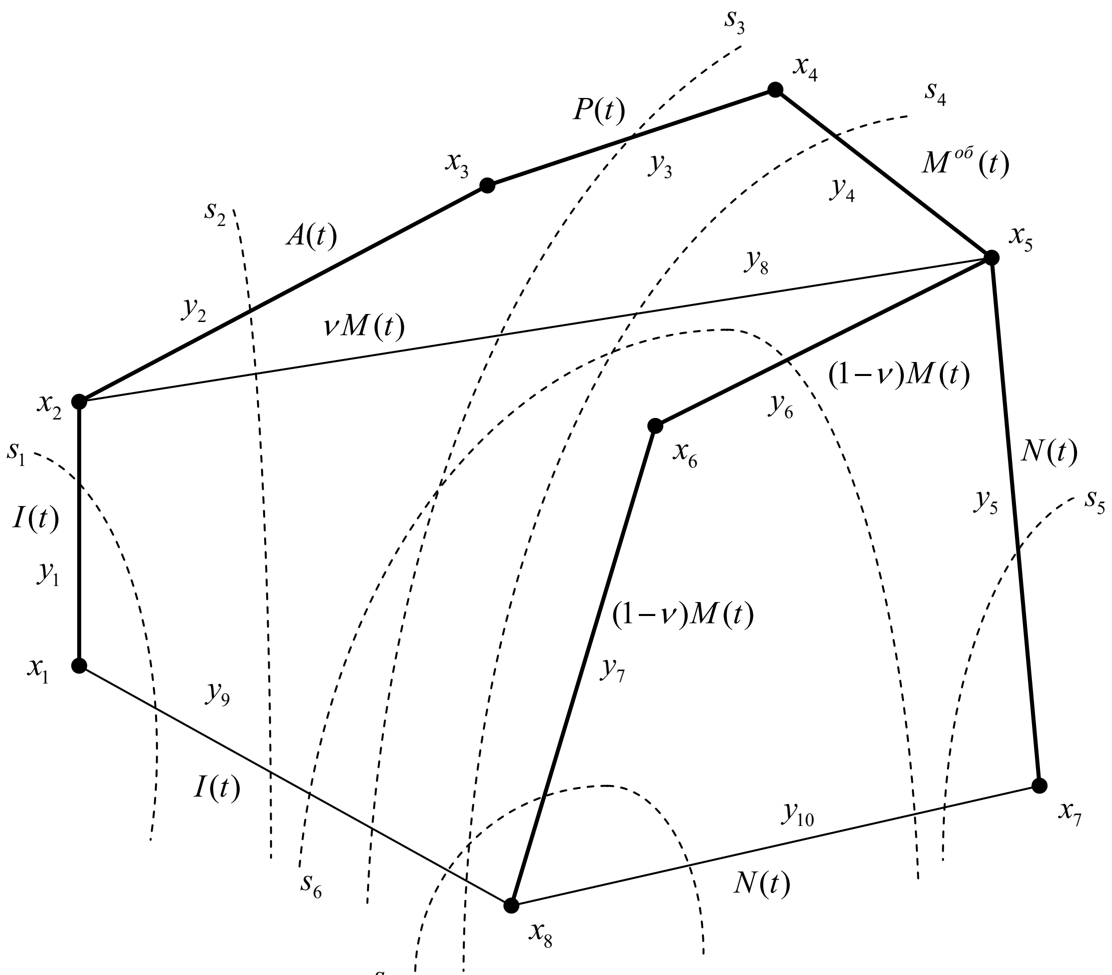

Рис. 3. Представление финансовой сети посредством графа G

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
S_T = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right],
\end{array}
$$

а вектор-поток:

$$L(t) = \Big[I(t) \quad A(t) \quad P(t) \quad M^{об}(t) \quad N(t) \quad (1-\nu)M(t)$$

$$(1-\nu)M(t) \quad \nu M(t) \quad I(t) \quad N(t) \Big]^{tr}$$

Применим закона Кирхгофа для токов:

$$S_T \cdot L(t) = \left[\begin{array}{ccccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} I(t) \\ A(t) \\ P(t) \\ M^{об}(t) \\ N(t) \\ (1-\nu)M(t) \\ (1-\nu)M(t) \\ \nu M(t) \\ I(t) \\ N(t) \end{bmatrix} = 0$$

Таким образом, получим следующие законы сохранения финансовых потоков на предприятии:

$$A(t) - \nu M(t) - I(t) = 0\,;$$
$$P(t) - \nu M(t) - I(t) = 0\,; \qquad (43)$$
$$M^{об}(t) - \nu M(t) - I(t) = 0\,.$$

Используя модель динамики малого предприятия с линейной производственной функцией получаем уравнения:

$$P(t) = f \cdot A(t);$$
$$\mathrm{M}^{об}(t) = (1-c) \cdot P(t);$$
$$\mathrm{M(t)} = \mathrm{M}^{об}(t) - N(t); \qquad (44)$$
$$N(t) = \tau_1 P(t) + \tau_2 k_\Lambda (1-\nu) M(t);$$
$$\frac{dA}{dt} = \nu M(t) + I(t);\ \ t \in [0,T];\quad \nu \in [0,1];\quad k_\Lambda \in (0,1],$$

где f – показатель фондоотдачи; c – удельная себестоимость выпуска продукции в стоимостном выражении; τ_1, τ_2 – ставки налогообложения на объем выпуска и прибыль соответственно; k_Λ – коэффициент, отражающий долю не реинвестируемых средств прибыли, не имеющих льгот по налогообложению (не все реинвестируемые средства освобождаются от налогов), и оцениваемый статистическим путем $0 < k_\Lambda \le 1$.

Объединив уравнения (43) и (44) получим систему уравнений, описывающих динамику развития малого предприятия и кругооборот его финансовых средств:

$$P(t) = f \cdot A(t);$$
$$\mathrm{M}^{об}(t) = (1-c) \cdot P(t);$$
$$\mathrm{M(t)} = \mathrm{M}^{об}(t) - N(t);$$
$$N(t) = \tau_1 P(t) + \tau_2 k_\Lambda (1-\nu) M(t);$$
$$\frac{dA}{dt} = \nu M(t) + I(t);\ \ t \in [0,T];\ \nu \in [0,1];\ k_\Lambda \in (0,1], \quad (45)$$
$$A(t) - \nu M(t) - I(t) = 0\,;$$
$$P(t) - \nu M(t) - I(t) = 0\,;$$
$$M^{об}(t) - \nu M(t) - I(t) = 0\,.$$

Полученная система является той математической моделью, которая отражает взаимосвязь между переменными, параметрами и ее структурой.

Запишем теперь эту систему в векторном виде:

$$Ax' + Bx = f(t)\,, \qquad (46)$$

где

$$x = \left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right)^{tr} = \left(A(t), P(t), \mathrm{M}^{об}(t), \mathrm{M}(t), N(t)\right)^{tr}, \quad (47)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} f & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-c) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \tau_1 & 0 & \tau_2 k_\Lambda (1-\nu) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu & 0 \end{pmatrix} \qquad (48)$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I(t) \end{pmatrix}^{tr} \qquad (49)$$

Используя определения из главы 3 исследуем спектральные свойства пучка $\lambda A + B$. Посчитаем определитель пучка $\lambda A + B$ – характеристический полином уравнения (46): $\det(\lambda A + B) =$ $= -\lambda(1 + \tau_2 k_\Lambda (1-\nu)) + f\nu(1 - c - \tau_1) \not\equiv 0$. Он обращается в 0 только при $\lambda_0 = \dfrac{f\nu(1-c-\tau_1)}{(1+\tau_2 k_\Lambda (1-\nu))}$. Следовательно пучок $\lambda A + B$ – регулярный, а λ_0 – это единственное конечное собственное число.

Собственный вектор x_0, отвечающий собственному числу λ_0 является решением уравнения $\left(\lambda_0 A + B\right)x = 0$ и имеет вид:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 & f & f(1-c) & \dfrac{\lambda_0}{\nu} & \dfrac{f\nu(1-c) - \lambda_0}{\nu} \end{pmatrix}^{tr}, \qquad (50)$$

где $\lambda_0 = \dfrac{f\nu(1-c-\tau_1)}{(1+\tau_2 k_\Lambda (1-\nu))}$.

Тогда получаем следующее разложение входного и выходного пространств:

$$X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^n:\ \ X = X_\infty + X_1,\ Y = Y_\infty + Y_1\,,$$
$$X_\infty = KerA = span\left\{x_1, x_2, x_3, x_4\right\},\ X_1 = span\left\{x_5\right\},$$

$$Y_\infty = B(X_\infty) = span\{y_1, y_2, y_3, y_4\},$$

$$Y_1 = A(X_1) = span\{y_5\},$$

где $x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{tr}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{tr}$,

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{tr},\ x_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{tr},$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 & f & f(1-c) & \dfrac{\lambda_0}{\nu} & \dfrac{f\nu(1-c)-\lambda_0}{\nu} \end{pmatrix}^{tr},$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} -1 & -(1-c) & 0 & \tau_1 & 0 \end{pmatrix}^{tr},$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{tr},\ y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \psi-1 & -\nu \end{pmatrix}^{tr},$$

$$y_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{tr},\ y_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{tr}.$$

Построим по канонической паре базисов $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ преобразующие матрицы Q и P:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 1 & 0 & 0 & f(1-c) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{\lambda_0}{\nu} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{(f\nu(1-c)-\lambda_0)}{\nu} \end{pmatrix} \qquad (51)$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c-1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{c+\tau_1-1}{\varphi} & \dfrac{1}{\varphi} & -\dfrac{1}{\varphi} & \dfrac{1}{\varphi} & 0 \\ -\dfrac{\tau_1+\tau_2(c-1)k_\Lambda(\nu-1)}{\varphi} & -\dfrac{\tau_2 k_\Lambda(\nu-1)}{\varphi} & \dfrac{\tau_2 k_\Lambda(\nu-1)}{\varphi} & -\dfrac{1}{\varphi} & 0 \\ \dfrac{\nu(\tau-c-1)}{\varphi} & \dfrac{\nu}{\varphi} & -\dfrac{\nu}{\varphi} & \dfrac{\nu}{\varphi} & 1 \end{pmatrix} \qquad (52)$$

где $\varphi = 1 + \tau_2 k_\Lambda (1-\nu)$.

Введем

$$x = Qz,\ \left[z = (z_1, z_2, ..., z_n);\quad |Q| \neq 0\right]. \qquad (53)$$

Подставив Qz вместо x в (46) и умножив почленно слева на P, получим:

$$\widetilde{A}\frac{dx}{dt} + \widetilde{B}x = \widetilde{f}(t). \qquad (54)$$

Таким образом:

$$\widetilde{A} = PAQ,\ \widetilde{B} = PBQ,\ \widetilde{f}(t) = Pf = (\widetilde{f}_1(t), \widetilde{f}_2(t), ..., \widetilde{f}_5(t)), \qquad (55)$$

Тогда матрицы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ имеют вид:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \qquad (56)$$

Система (46) представляет собой систему четырех уравнений вида: $N^{(i)}\left(\dfrac{d}{dt}\right)z_i = \widetilde{f}_i,\quad (i = \overline{1,4})$ и одного уравнения вида: $Jz_5 + \dfrac{dz_5}{dt} = \widetilde{f}_5$. $N^{(i)}$ – нулевые блоки, а блок $J = (\lambda_0)$. Отсюда последовательно однозначно определяем решения:

$$z_1 = \widetilde{f}_1, z_2 = \widetilde{f}_2, z_3 = \widetilde{f}_3, z_4 = \widetilde{f}_4,$$

$$z_5 = e^{\lambda_0 t}K + \int_0^t e^{\lambda_0(t-\tau)}\widetilde{f}_5(\tau)d\tau. \qquad (57)$$

Обратный переход от системы (54) к исходной системе (46) осуществляется формулой (53,55). И тогда решение имеет вид:

$$x = \begin{pmatrix} h(t) & fh(t) & f(1-c)h(t) & \dfrac{\lambda_0 h(t)}{\nu} & \dfrac{(f\nu(1-c)-\lambda_0)h(t)}{\nu} \end{pmatrix}^{tr},$$

где $h(t) = e^{\lambda_0 t}K + \int_0^t e^{\lambda_0(t-\tau)}I(\tau)d\tau$, $\lambda_0 = \dfrac{f\nu(1-c-\tau_1)}{(1+\tau_2 k_\Lambda(1-\nu))}$,

K – определяется начальными значениями экономических параметров введеных ранее.

Рассмотри три случая динамики инвестиций $I(t)$:

1) $I(t) = I_0 = const$.

В данном случае, при фиксированном объеме инвестиций решение системы (46) имеет вид:

$$h_1(t) = e^{\lambda_0 t}K + \frac{I_0}{\lambda_0}\left(e^{\lambda_0 t} - 1\right) = \left(K + \frac{I_0}{\lambda_0}\right)e^{\lambda_0 t} - \frac{I_0}{\lambda_0}. \qquad (58)$$

2) $I(t) = \beta t$.

При линейно возрастающей стратегии инвестирования – с темпом роста инвестиций $\beta > 0$ имеем следующее решение дифференциальной системы (4.4):

$$h_2(t) = e^{\lambda_0 t}K + \frac{\beta}{\lambda_0^2}\left(e^{\lambda_0 t} - t\lambda_0 - 1\right) = \left(K + \frac{\beta}{\lambda_0^2}\right)e^{\lambda_0 t} - \frac{\beta(t\lambda_0 + 1)}{\lambda_0^2}. \qquad (59)$$

3) $I(t) = I_0 e^{\beta t}$.

При возрастающей – со средним темпом $\beta > 0$, но по нелинейному закону и с минимальным уровнем гарантированной государственной поддержки ($I_0 = I(0)$, при $t = 0$) получим решение следующего вида:

$$h_3(t) = e^{\lambda_0 t}K + \frac{I_0}{\beta - \lambda_0}\left(e^{\beta t} - e^{\lambda_0 t}\right) = \left(K + \frac{I_0}{\lambda_0 - \beta}\right)e^{\lambda_0 t} - \frac{I_0 e^{\beta t}}{\lambda_0 - \beta}. \qquad (60)$$

Найденные решения совпадают с полученными ранее результатами. Это свидетельствует о том, поставленная задача допускает различные подходы для исследования системы и нахождения решений.

Выводы из проведенного исследования. Работа посвящена анализу известных математических моделей развития малого предприятия и разработке теоретико-графовой динамической однопродуктовой модели финансовой деятельности предприятия. При решении задач, связанных с динамикой развития малого предприятия, использовались матричная теория графов, дифференциальные уравнений, стохастический анализ.

В работе также разработана модель, описывающая движения финансовых потоков и кругооборот денежных средств на малом предприятии, основанная на теоретико-графовом подходе.

В дальнейшем планируется рассмотреть нелинейную модификацию модели и исследовать решение соответствующих нелинейных вырожденных дифференциальных уравнений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

1. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы: монография : Москва : Лаборатория Базовых Знаний, 2011. 376 с.
2. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. Москва : Наука, 1973. 368 с.
3. Бланк А.Г. Управление денежными потоками. Киев : Ника-Центр, 2012. 736 с.
4. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика. Харків: Компанія СМІТ, 2004. 480 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва : Наука. 1988. 552 с.
6. Евдокимов А.Г., Тевяшев А. Д., Дубровский В. В. Моделирование и оптимизация в инженерных сетях. Москва : Стройиздат, 2010. 368 с.
7. Свами М. Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. Москва : Мир, 1984. 455 с.
8. Руткас А.Г. Введение в теорию графов: Учебное пособие. Харьков : ХНУ, 2005. – 64 с.
9. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. Москва: Мир, 1994. 496 с.
10. Харари Ф. Теория графов. Москва: Мир, 1973. 304 с.
11. Хачатрян С. Р., Пинегина М. В., Буянов В.П. Методы и модели решения экономических задач. Москва : Экзамен, 2015. 384 с.

REFERENCES:

1. Akimov O.E. (2011) Diskretnaya matematika: logika, gruppy, grafy [Discrete mathematics: logic, groups, graphs]. Moscow: Laboratoriya Bazovykh Znaniy. (in Russian)
2. Basaker R., Saati T. (1973) Konechnye grafy i seti [End Graphs and Networks]. Moscow: Nauka. (in Russian)
3. Blank A.G. (2012) Upravlenie denezhnymi potokami [Cash management]. Kiev : Nika-Tsentr. (in Russian)
4. Bondarenko M.F., Bilous N.V., Rutkas A.G. (2004) Komp'juterna dyskretna matematyka [Computer Discrete Mathematics]. Kharkiv: Kompanija SMIT. (in Ukrainian)
5. Gantmakher F. R. (1988) Teoriya matrits [Matrix theory]. Moscow: Nauka. (in Russian)
6. Evdokimov A.G., Tevyashev A.D., Dubrovskiy V.V. (2010) Modelirovanie i optimizatsiya v inzhenernykh setyakh [Modeling and optimization in engineering networks]. Moscow: Stroyikhdat. (in Russian)
7. Svami M. Tkhulasiraman K. (1984) Grafy, seti i algoritmy [Graphs, networks and algorithms]. Moscow: Mir. (in Russian)
8. Rutkas A. G. (2005) Vvedenie v teariyu grafov [Introduction to Graph Theory]. Kharkov: KhNU. (in Russian)
9. Fillips D., Garsia-Dias A. (1994) Metody analiza setey [Network Analysis Methods]. Moscow: Mir. (in Russian)
10. Kharari F. (1973) Teoriya grafov [Graph theory]. Moscow: Mir. (in Russian)
11. Khachatryan S.R., Pinegina M.V., Buyanov V.P. (2015) Metody i modeli resheniya ekonomicheskikh zadach [Methods and models for solving economic problems]. Moscow: Ekzamen. (in Russian)

Martynova Olena
Candidate of Economic Sciences, Associate Professor,
Senior Lecturer at Department of Higher Mathematics,
Economic and Mathematical Methods
Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics

THEORETICAL-GRAPHIC MODEL ENTERPRISE FINANCIAL REPORTING

The purpose of the article. The article is devoted to the analysis of well-known mathematical models for the development of a small enterprise and the development of a graph-theoretic dynamic single-product model of the financial activity of an enterprise. The relevance of the problem is that at the present stage of economic development, both in our country and abroad, in the system of financial management of an enterprise, more and more attention is paid to the organization of cash flows. They have a significant impact on the final results of the economic activity of the enterprise. The concept of cash flow of an enterprise as an independent object of financial management has not received sufficient reflection, not only in domestic but also in foreign literature on financial management.

Methodology. The financial activity of the enterprise is proposed to be considered as a coherent oriented graph. When solving problems associated with the dynamics of the development of a small enterprise, matrix graph theory, differential equations, and stochastic analysis were used.

Results. A qualitative analysis of the dynamics of capital productivity from the ratio indicates that the growth of fixed assets is determined in this model by their initial state, structural characteristics of the object, as well as the ratio of the growth rate of the investment and production efficiency indicators. The resulting system $Ax' + Bx = f(t)$ is the mathematical model that reflects the relationship between variables, parameters and its structure.

The case is considered in which not only external, but also internal investments of a small enterprise are a function of time. This case is taken into account in the model by describing the dynamics of a variable that reflects the share of net profit allocated to reinvestment as a known function of time $\nu(t)$. With any kind of functions, the model of a small enterprise becomes non-linear. In terms of its economic content, this variable is a control parameter characterizing the size of the funds allocated for consumption and accumulation. Therefore, the introduction of variable dynamics $\nu(t)$ into the model describes a specific strategy for the enterprise's behavior in the distribution of net profit.

Practical implications. The paper considers the dynamics of the development of a small enterprise and the financial circuit on it with the help of a combination of several approaches: building a network model of the enterprise and analyzing the dynamic equations of enterprise development. This allows managers to make effective management decisions.

Value/originality. In the work, a model is developed that describes the movement of financial flows and the cash flow in a small enterprise, based on a graph-theoretic approach. In the future, it is planned to consider a nonlinear modification of the model and investigate the solution of the corresponding nonlinear degenerate differential equations.